Was bringen StudienanfängerInnen mit? – Konzeptualisierung des Vorwissens zu Algebra und Funktionen von Erstsemesterstudierenden in INT-Studiengängen

Moser-Fendel, Jeremias[1]; Wessel, Lena[2]; Klinger, Marcel[3]

[1]Albert-Ludwigs-Universität Freiburg; [2]Pädagogische Hochschule Freiburg; [3]Universität Duisburg-Essen, Essen

Zusammenfassung: Zunehmende Heterogenität und hohe Abbruchquoten (z.B. Heublein & Schmelzer 2018) in MINT-Fächern sind äußere Rahmenbedingungen für Forschung am Übergang Schule-Hochschule in den vergangenen Jahren. Mathematisches Vorwissen von Studienanfängerinnen und -anfängern bewährt sich als guter Prädiktor für den Studienerfolg (z.B. Derr et al. 2018). An einer qualitativen Beschreibung des benötigten Vorwissens für ein MINT-Studium wird derzeit gearbeitet (z.B. Rach & Ufer 2018). Vielfach werden Studierenden unzureichende Fähigkeiten im Bereich der elementaren Algebra (z.B. Termumformungen) attestiert. Zur genaueren Analyse des auf Algebra und Funktionen bezogenen Vorwissens von Studienanfängerinnen und -anfängern in INT-Fächern wurde daher an der Universität Freiburg, ausgehend vom Testinstrument FALKE (Klinger 2018), ein Testinstrument entwickelt und erprobt. Die Ergebnisse einer Datenerhebung bei n=353 INT Studierenden (Umwelt- und Naturwissenschaften, Ingenieurswissenschaften und Informatik) werden dargestellt und diskutiert

Einleitung

An vielen Hochschulen in Deutschland wird derzeit an der Entwicklung von Online-Lernmaterialien zur Erleichterung des Studieneinstiegs in MINT-Fächern gearbeitet. Damit reagieren Hochschulen auf die zunehmende Heterogenität unter Studierenden und überdurchschnittlich hohe Abbruchquoten in mathematischen sowie natur- und ingenieurswissenschaftlichen Studienfächern (z.B. Dieter 2012, Dieter & Törner 2012, Heublein et al. 2017). Die neusten Erhebungen des Deutschen Zentrums für Hochschul- und Wissenschaftsforschung (DZHW) zeigen, dass die Problematik in den vergangenen Jahren keinerlei Aktualität verloren hat: Nach wie vor liegen MINT-Fächer mit ihren Abbruchquoten (Mathematik und Naturwissenschaften: 41%; Ingenieurswissenschaften: 35 %) deutlich über dem Durchschnitt von 28 % eines Jahrgangs (Heublein & Schmelzer 2018).

Erkenntnisse über Abbruchquoten und mathematikbezogene Leistungen zu Beginn des Studiums stehen in Zusammenhang mit bildungspolitischen und gesellschaftlichen Entwicklungen, wie dem Wegfall von Grund- und Leistungskursen in einigen Bundesländern und der wachsenden Zahl an Hochschulzugangsberechtigten sowie der damit verbundenen Zunahme an Heterogenität unter den Studienanfängerinnen und -anfängern

Klinger, M., Schüler-Meyer, A. & Wessel, L. (Hrsg.) (2019). Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2018: Beiträge zum gleichnamigen Symposium am 9. und 10. November 2018 an der Universität Duisburg-Essen. Münster: WTM.

(Blömeke 2016). Darüber hinaus kommt der mathematikbezogenen Selbstwirksamkeitserwartung (Bandura 1977, Jerusalem 2002) eine besondere Bedeutung für ein erfolgreiches Studium zu (Blömeke 2016). Kompetenzerleben, soziale Einbindung und Selbstbestimmungen sind Erfahrungsmerkmale, die positiven Einfluss auf die Selbstwirksamkeitserwartung nehmen können (Deci & Ryan 1985).

Als stärkster Prädiktor für den Studienerfolg haben sich fachspezifische Vorkenntnisse der Studienanfängerinnen und -anfänger erwiesen (z.B. Söderling & Geschwind 2017, Kokkelenberg & Sinah 2010, Hell et al. 2008). Für Fächer im MINT-Bereich deutet eine Längsschnittbeobachtung von Knospe (2012) auf ein Absinken mathematischer Lernvoraussetzungen hin. Über die Ursachen und den richtigen Umgang mit dieser Diskrepanz, der Bedeutung fachspezifischer Vorkenntnisse für den Studienerfolg einerseits und des möglicherweise abnehmenden Niveaus dieser Vorkenntnisse unter Studierenden im ersten Semester andererseits, wird derzeit kontrovers diskutiert. So beklagen Mathematikhochschullehrerinnen und –didaktikerinnen das Fehlen einfachster Rechenfertigkeiten und bestärken die essentielle Bedeutung einer verstehensorientierten Mathematikausbildung in Schulen und Hochschulen über alle mathematikhaltigen Studiengänge hinweg (Vieth-Entus 2017, Warnecke et al. 2017).

In diesem Beitrag werden theoretische und empirische Hintergründe beleuchtet, die sich zur Konzeptualisierung des mathematischen Vorwissens von Studierenden bewährt haben und Ausgangspunkte für die empirische Studie darstellen.

Theoretische und empirische Hintergründe

Ausgangspunkt für die Notwendigkeit der genaueren Analyse des mathematischen Vorwissens von Studierenden zu Studienbeginn sind die im folgenden beschriebenen Gründe für einen Studienabbruch sowie bisherige Erkenntnisse zu mathematischen Fähigkeiten am Übergang Schule-Hochschule.

Gründe für Studienabbruch

Leistungsprobleme, mangelnde Motivation und mangelnde Identifikation mit dem Studienfach werden von Studienabbrecherinnen und -abbrechern als ausschlaggebende Gründe für ein Beenden des Studiums ohne Abschluss angegeben (Heublein et al. 2017). Wesentliche Einflussfaktoren auf Studienabbruchprozesse sind Bildungsherkunft, Art der Hochschulzugangsberechtigung, Abiturnoten, studienrelevante Vorkenntnisse und eine abgeschlossene Berufsausbildung (ebd.). Während Heublein et al. (2017) Studienabbruch fächer- und hochschulartübergreifend untersuchen, liegt der Fokus in einer Studie von Dieter (2012) auf Studienfachwechselquoten im Bereich der Fachmathematik (Bachelor, Master, Lehramt Mathematik). Dem höchsten Abbruchrisiko unter diesen Studierenden sind *Unzufriedene* (in Bezug auf den eigenen Erfolg und die Rahmenbedingungen) ausgesetzt (Dieter 2012, S. 177). Eine Analyse der Motivationsentwicklung von Fachmathematik-Bachelor- und Lehramtsstudierenden (Liebendörfer 2018) zeigt überwiegend extrinsische Motivationsfaktoren (z.B. Druck durch wöchentliche Übungsaufgaben) in der Studieneingangsphase und unterstreicht damit mangelndes Kompetenz- und Autonomieerleben als mögliche Gründe für einen Studienabbruch.

Interessanterweise hat sich gerade die Abiturnote bei Dieter (2012) allerdings nicht als Prädiktor für einen Studienabbruch bewährt, mathematikspezifischen Vorkenntnisse (operationalisiert z. B. über die Abschlusszeugnisnote Mathematik oder Punkte in der Mathematikabiturprüfung) gingen nicht in die Zusammenhangsanalysen ein. Nach Heublein et al. (2017) haben auch Faktoren wie Fachidentifikation, Eigenständigkeit, Wahrnehmung von Beratungs- und Betreuungsmöglichkeiten und vor allem die soziale Integration an der Hochschule einen großen Einfluss auf individuelle Entscheidungen im Studienverlauf. Darüber hinaus zeigt sich, dass die Studieneingangsphase eine entscheidende Phase für den weiteren Studienverlauf darstellt. In Mathematik, Natur- und Ingenieurswissenschaften entfallen 42 bis 47 % aller Studienabbrüche auf die ersten zwei Semester eines begonnenen Studiums (Heublein et al. 2017, S. 281).

Studienabbruch kann demzufolge durch verschiedene ex- und intrinsische Faktoren bedingt sein. Fachbezogene Herausforderungen, insbesondere in der Studieneingangsphase, erhöhen zusätzlich das Risiko eines Studienabbruchs. Insofern kommt den fachspezifischen Lernvoraussetzungen besondere Bedeutung zu. Studien zu mathematischen Fähigkeiten am Übergang Schule-Hochschule beleuchten diesen Aspekt aus unterschiedlichen Perspektiven.

Mathematisches Vorwissen am Übergang Schule-Hochschule aus normativer Perspektive

Eine öffentliche Diskussion über Kompetenzorientierung in den Bildungsstandards Mathematik entbrannte 2017 unter Mathematik-Lehrenden und -wissenschaftlerinnen an Schulen und Hochschulen aufgrund des sinkenden Niveaus mathematischer Vorkenntnisse unter Studienanfängerinnen und -anfängern (Warnecke et al. 2017). „In der Praxis sind die Vorkenntnisse vieler Studienanfänger weit vom Mindestanforderungskatalog der Hochschulen Baden-Württembergs für ein Studium von WiMINT Fächern (Cosh) entfernt“ (Mathematikunterricht und Kompetenzorientierung 2017, S. 2). Der Mindestanforderungskatalog der Cooperation Schule-Hochschule (cosh) (2014) trägt mathematisches Grundwissen und Grundkönnen zusammen, über das Studienanfängerinnen für den erfolgreichen Start in ein WiMINT-Studium verfügen sollten und setzen damit einen normativen Rahmen. Die Forderungen der Cosh-Gruppe werden im Wesentlichen durch die Ergebnisse der Delphi-Studie MaLeMINT (Neumann, Pigge & Heinze 2017) gestützt. In dieser werden die von Studienanfängerinnen und Studienanfängern erwarteten mathematischen Lernvoraussetzungen für ein MINT-Studium aus Sicht der Hochschulen erhoben und systematisiert. Aus den Ergebnissen einer Befragung einer Stichprobe von mehr als 1 000 Hochschullehrenden sollen dabei Mindeststandards für mathematische Kompetenzen zum Studienbeginn abgeleitet werden. Die Bedeutung mathematischen Vorwissens zu Beginn eines Studiums für den Erfolg in mathematikhaltigen Studiengängen wird hierbei nicht nur durch Dozentinnen und Dozenten hervorgehoben, sondern auch durch empirische Studien bekräftigt: Diese zeigen, dass das fachspezifische Vorwissen einen starken Prädiktor für den Studienerfolg (häufig operationalisiert über den bestandenen Modulabschluss im ersten Semester) darstellt (z.B. Derr et al. 2018, Greefrath et al. 2017, Rach & Heinze 2017, Söderling & Geschwind 2017).

Empirische Spezifizierung studienerfolgsrelevanten Vorwissens: Inhalte, Wissensarten

Zur genaueren Spezifizierung der mathematischen Inhalts- und Kompetenzbereiche, die für Studienerfolg im ersten Semester in INT-Studiengängen von besonderer Bedeutung sind, liegen empirische Studien mit jeweils verschiedenen Stichproben (also Studierende unterschiedlich mathematikhaltiger Studiengänge) vor.

Mathematikspezifische Schwierigkeiten von Studierenden sind häufig im Bereich der (schulischen) Algebra zu verorten (Altieri 2016, Knospe 2012, Greefrath et al. 2017). Für Studierende der Ingenieurswissenschaften konnten Derr et al. (2018) zeigen, dass sich spezifische Inhaltsbereiche (z.B. Arithmetik, lineare Gleichungen, Differentialrechnung) jedoch nicht bzgl. ihrer Relevanz für den Studienerfolg im ersten Semester unterscheiden. Unter zehn mathematischen Themen, die während eines Vorkurses an der Dualen Hochschule Baden-Württemberg mit den Teilnehmenden behandelt werden und zu denen vorab das Vorwissen der Studierenden erhoben wurde, zeigen sich keine signifikanten Unterschiede bezogen auf ihre Relevanz für den Studienerfolg (Derr et al. 2018).

Rach & Ufer (2018) untersuchen das Vorwissen Mathematikstudierender (Bachelor Fachmathematik, Wirtschaftsmathematik, gymnasiales Lehramt) in der Studieneingangsphase. Mithilfe einer IRT-Modellierung konnten vier Stufen von Vorwissen definiert werden: Ausführen von Routineverfahren sowie Nachvollziehen und Bewerten nicht-formaler Aussagen (Stufe 1); Nutzen vertrauter Vorstellungen zu mathematischen Konzepten ohne Darstellungswechsel (Stufe 2); Flexibles Nutzen mathematischer Konzepte mit Darstellungswechsel im Rahmen der Schulmathematik (Stufe 3); Flexibles Nutzen formaler Schreibweisen sowie Führen mathematischer Beweise (Stufe 4). Damit zeigen die weiterführenden Analysen nicht nur, dass mathematisches Vorwissen einen wichtigen Prädiktor für den Studienerfolg im ersten Semester darstellt, es kann auch eine ausdifferenzierte Einschätzung bzgl. der Art des relevanten Vorwissens getroffen werden: Ausschlaggebend für den Studienerfolg im ersten Semester eines Mathematikstudiums ist demnach die flexible Nutzung mathematischer Konzepte in verschiedenen Darstellungsformen (Stufe 3) (Rach & Ufer 2018). Dieses Resultat könnte bezogen auf die Erkenntnisse von Derr et al. (2018) erklären, dass auch für den Studienerfolg in einer INT-Studieneingangsphase nicht Vorwissen bezogen auf spezifische Inhaltsbereiche studienerfolgsrelevant ist, sondern die Qualität des auf diesen Inhalt bezogenen Wissens eine Rolle spielt.

Häufig unabhängig von ihrer empirisch nachweisbaren Relevanz für Studienerfolg werden in weiteren Studien Grundwissen und Grundkönnen (Feldt-Caesar 2017) von Schülerinnen und Schülern bzw. Studierenden am Übergang von der Schule zur Hochschule analysiert. Klinger (2018) entwickelte und validierte für den Inhaltsbereich Funktionen und Analysis ein Kompetenzmodell und ein dieses Modell prüfendes Testinstrument zum funktionalen Denken in diesem Inhaltsbereich. Für Jugendliche in der Sekundarstufe deuten die mit Hilfe des Instruments gemessenen Ergebnisse darauf hin, dass Schülerinnen und Schülern das Erkennen von Zusammenhängen und das Vernetzen von Themenbereichen Schwierigkeiten bereitet. Für das Erschließen themenübergreifender Zusammenhänge kommt konzeptuellem Wissen eine besondere Bedeutung zu (Klinger 2018). Neben der Studie von Klinger ziehen auch andere Autoren die Wissensarten (konzeptuelles und prozedurales Wissen) zur genaueren Spezifizierung heran, um mathematisches Vorwissen von Studierenden zu untersuchen.

Altieri (2016) benennt das Beherrschen prozeduraler Fähigkeiten als wichtige Voraussetzung für den Erfolg in Mathematikklausuren ingenieurswissenschaftlicher Studiengänge. In untersuchten Mathematikklausuren dieser Studiengänge (erstes und zweites Fachsemester) lassen sich 50 bis 88 % der Aufgaben allein durch prozedurales Wissen lösen (ebd.). Nur etwa 30 % der Aufgaben erfordern konzeptuelles Wissen. Es verwundert daher nicht, dass prozedurales Wissen in 75 % der Fälle Klausurerfolg prognostiziert (ebd., S. 170f.). Dabei hat Kalkülfertigkeit (Fertigkeit bei der Durchführung von Prozeduren) nur einen halb so großen Einfluss auf die Klausurleistung wie Kalkülkenntnis (Kenntnis von Prozeduren). Leistungskursabsolventinnen und -absolventen sind hier überproportional oft unter prozedural starken Studierenden anzutreffen, während Absolventinnen und Absolventen einer Gesamtschule und Grundkursteilnehmende häufiger unter den prozedural schwachen Studierenden zu finden sind (ebd., S. 174f.).

Engelbrecht et al. (2005, 2009, 2012) beforschen prozedurales und konzeptuelles Wissen von Studierenden in den Naturwissenschaften im ersten Semester in Südafrika und Schweden. Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass Studierende bei prozedural zu lösenden Aufgaben keine bessere Leistung erzielen, aber vertrauter sind als im Umgang mit konzeptuell zu lösenden Aufgabenstellungen (Engelbrecht et al. 2005). Eine Analyse von Studierendenlösungen zu Aufgaben, die von ExpertInnen als konzeptuell oder prozedural lösbar eingeschätzt wurden, zeigt, dass die Unterscheidung von konzeptuell und prozedural lösbaren Aufgaben möglich ist, aber nicht notwendigerweise dem Lösungsweg der Studierenden entspricht. Insbesondere Aufgaben, bei denen ein konzeptueller Lösungsweg erwartet wurde, wurden von Studierenden auch prozedural gelöst (Engelbrecht et al. 2009). Zur Spezifizierung des studienrelevanten Vorwissens deuten Ergebnisse der genannten Forschergruppe darauf hin, dass die empirische Umsetzung und Testentwicklung für den Vergleich prozeduralen und konzeptuellen (Vor-)Wissens schwierig ist. Insbesondere die empirischen Ergebnisse von Engelbrecht et al. (2005, 2009) bestätigen die Annahme, dass es sich bei den Wissensarten nicht um disjunkte, sondern eng miteinander verknüpfte und (gerade in der hochschulischen Praxis) schwer differenzierbare Konstrukte handelt (Silver 1986).

Forschungsfragen und Methode

Bisherige Forschungsergebnisse konnten nur punktuell beleuchten, welches Vorwissen für MINT-Studierende in der Studieneingangsphase besonders studienerfolgsrelevant zu sein scheint. Für die empirisch fundierte Entwicklung von Vor- und Brückenkursen sowie für hochschulmathematikdidaktische Entscheidungen, die die Konzeption der Mathematik-Vorlesungen in der Studieneingangsphase betreffen, ist dies jedoch spezifisch für die jeweilige Zielgruppe des Unterstützungs- bzw. Vorlesungsangebots relevant.

Um für einen spezifischen Inhaltsbereich Aufschluss darüber zu erhalten, inwiefern Studierende über prozedurales und konzeptuelles Vorwissen verfügen, kann es trotz der angesprochenen Herausforderungen vielversprechend sein, ausgehend von den beiden Wissensarten Vorwissen spezifischer zu konzeptualisieren. Im für Anwendungsfächer relevanten Inhaltsbereich Algebra und Funktionen bietet sich dazu eine Diagnose der bei Studierenden verfügbaren Variablenaspekte an. Ausgehend von den Ergebnissen vorheriger empirischer Studien von Klinger (2018), Altieri (2016) sowie Rach & Ufer (2018) besteht daher ein Ziel dieser Studie darin, das Vorwissen von INT-Studierenden für die Inhaltsbereiche Algebra und Funktionen genauer zu untersuchen und mit dem Studienerfolg der Studierenden in Beziehung zu setzen.

Die damit zusammenhängenden Forschungsfragen stehen im Fokus dieses Beitrags:

1. Inwiefern können mithilfe eines digitalen Testinstruments Rückschlüsse auf algebra- und funktionenbezogenes Vorwissen von INT-StudienanfängerInnen gezogen werden?
2. Welche Zusammenhänge zeigen sich zwischen Testleistungen und Hintergrundfaktoren (Demographische Daten, Computer-Affinität, allgemeine Selbstwirksamkeitserwartung und mathematisches Selbstkonzept)?

Zur Beantwortung der Fragen werden die Ergebnisse der Studie zunächst deskriptiv ausgewertet. Eine explorative Faktorenanalyse in Kombination mit Reliabilitätsanalysen soll Aufschluss darüber geben, inwiefern sich das Testinstrument dazu eignet, Algebra- und Funktionenbezogenes Vorwissen von Studierenden im ersten Semester in zu analysieren. Mittels linearer Regression werden zur Beantwortung von Forschungsfrage 2 Prädiktoren für das Testergebnis ermittelt.

Operationalisierung des Vorwissens zu Algebra und Funktionen und Entwicklung eines Testinstruments

Mathematikspezifische Schwierigkeiten von Studierenden sind häufig im Bereich der (schulischen) Algebra zu verorten (Altieri 2016, Knospe 2012, Greefrath et al. 2017), gleichzeitig liegen in der schulischen Algebra unverzichtbare Verstehensgrundlagen für funktionale Zusammenhänge. Als Lernziele des schulischen Algebra-Unterrichts nennen Malle et al. (1993, S. 10) „die Möglichkeit mit Variablen, Sachverhalte allgemein darzustellen“ und dass sich diese „einsetzen [lassen] zu allgemeinem Problemlösen, allgemeinem Kommunizieren (Mitteilen), allgemeinem Argumentieren (Begründen, Beweisen) und allgemeinem Explorieren.“ Demnach ist der Umgang mit Variablen ein wesentlicher Bestandteil der (schulischen) Algebra (vgl. auch Malle 1989, Akinwunmi 2012).

Um bei Jugendlichen das Verständnis von Variablen zu diagnostizieren, können Variablenaspekte herangezogen werden. Diese finden sich zunächst bei Freudenthal (1973), der Variablen nach der Art ihrer Verwendung unterscheidet. Zugrunde liegt die Frage: Wofür steht die Variable? Nach Freudenthal (1973) treten Variablen als *Unbestimmte* (Variable als unbekanntes Objekt, dessen nähere Bestimmung nicht weiter interessiert), *Unbekannte* (Variable als unbekanntes aber bestimmbares Objekt) oder als *Veränderliche* (Variable in funktionalen Zusammenhängen) auf. Eine ähnliche Unterscheidung von Variablenaspekten findet sich auch bei Malle et al. (1993, S. 80). Variablenaspekte fragen danach, wie der Betrachtende auf eine Variable blickt (Siebel 2005). Ein Wechsel zwischen diesen Betrachtungsweisen ist auch innerhalb einer Aufgabe möglich (Akinwunmi 2012, S. 10). Als Variablenaspekte beschreiben Malle et al. (1993) mit dem Gegenstandsaspekt, Einsetzungsaspekt und Kalkülaspekt drei Möglichkeiten, eine Variable zu deuten.

Die Unterscheidung zwischen *unbekannter* und *unbestimmter* Variable kann in Aufgaben meist eindeutig getroffen werden (Akinwunmi 2012). Schwieriger ist die Differenzierung von *Unbestimmter* und *Veränderlicher*, da nicht ohne weiteres entschieden werden kann, ob die Variable gleichzeitig oder in zeitlicher Aufeinanderfolge einen Zahlenbereich repräsentiert (Malle et al. 1993). Dieses Problem tritt auch in funktionalen Zusammenhängen auf. Der Veränderlichenaspekt kommt stärker bei Betrachtung des Zuordnungsverhaltens oder des Änderungsverhaltens einer Funktion (Vollrath 1989, Vollrath & Weigand 2007) zum Tragen.

Für funktionales Denken im konzeptuellen Sinne ist also der Variablenaspekt der Veränderlichen unerlässlich, während die Variable als Unbekannte, dessen nähere Bestimmung nicht weiter interessiert, den Kalkülaspekt (Variable als bedeutungsloses Zeichen) und somit eher prozedurales Wissen adressiert. Der Kalkülaspekt wird insbesondere dann aktiviert, wenn Prozeduren (z.B. Gleichungen umformen) ausgeführt werden, ohne weiter über die Bedeutung der Variablen nachzudenken.

Unter der Verwendung des Test-Instruments „FALKE“ zum funktionalen Denken (Klinger 2018) und weiteren Items aus dem Cosh-Mindestanforderungskatalog wurde ein Test mit zwei Skalen entsprechend der Variablenaspekte (mit theoretischer Zuordnung der Items zu Variablenaspekten) entwickelt und im Wintersemester 2017/2018 als Paper-and-Pencil-Test pilotiert:

- 1. Skala umfasst Items, für die zur Lösung Variablenaspekte *Variable als Unbekannte* (Variable als bedeutungsloses Zeichen, als beliebige aber feste Zahl) oder *Unbestimmte* (Variable als unbekanntes Objekt, dessen nähere Bestimmung nicht weiter interessiert) aktiviert werden müssen.
- 2. Skala umfasst Items, für die zur Lösung Variablenaspekt der *Veränderlichen* (Variable in funktionalen Zusammenhängen) aktiviert werden muss.

Der Test wurde anschließend auf Grundlage der Pilotierung modifiziert und in digitalisierter Form auf einer Lernplattform (ILIAS) implementiert.

Die 21 Items des entwickelten Testinstruments setzen sich zusammen aus zehn Items zu algebraischen Denkhandlungen und Prozeduren (u.a. dem cosh-Mindestanforderungskatalog entnommen) und elf Items zum Funktionalen Denken (aus dem FALKE-Testinstrument von Klinger 2018) (s. Abb. 1).

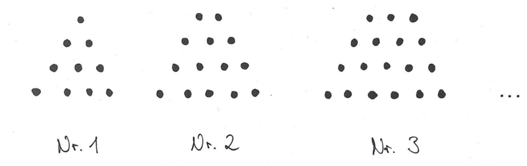
Als Ergänzung zu den Items zum funktionalen Denken adressieren Items aus dem Cosh-Mindestanforderungskatalog zum einen thematisch andere Bereiche der Algebra (neben Funktionalen Aspekten sind das nach Malle et al. 1993 Terme und Formeln; Item 1-10). Andererseits können die Variablen hier als *Unbekannte* oder *Unbestimmte* aufgefasst werden (Beispiel-Items siehe Abb. 2).

Variable als Unbestimmte oder Unbekannte	**Variable als Veränderliche**
1) Punktmuster	11) Ableiten
2) Formel aufstellen	12) Funktionswerte
3) Binomische Formel	13) Ableitung
4) Potenzgesetze	14) Transformation
5) Produkt- und Kettenregel	15) Weg-Zeit
6) Klammern und Vorzeichen	16) Graphen
7) Binomische Formel	17) Kegel
8) Potenzgesetze anwenden	18) Koordinatensystem
9) Bruchgleichung lösen	19) Ableitung I
10) Quadratische Gleichungen	20) Ableitung II
	21) Schwimmbecken

Abb. 1: Itemübersicht in der theoretischen Zuordnung zu Variablenaspekten

Item 1: Punktmuster

Betrachte die folgenden Punktmuster:



Wie viele Punkte hat Muster Nr. 4?

Wie viele Punkte hat Muster Nr. 10?

Wie viele Punkte hat das n-te Muster?

Item 7: Binomische Formel

Vereinfache so weit wie möglich:

$$\frac{4 - t^2}{4 - 4t + t^2}$$

Item 14: Transformation

Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2$.

Wie muss der Term einer Funktion $g(x)$ lauten, wenn ihr Graph genauso aussehen soll wie der von $f(x)$, nur **um eine Einheit nach links** verschoben?

$$g(x) =$$

Wie muss der Term einer Funktion $h(x)$ lauten, wenn ihr Graph genauso aussehen soll wie der von $f(x)$, nur **um eine Einheit nach oben** verschoben?

$$h(x) =$$

Item 18: Koordinatensystem

Welches der folgenden Koordinatensysteme stellt die Funktion $f(x) = 2x$ dar?

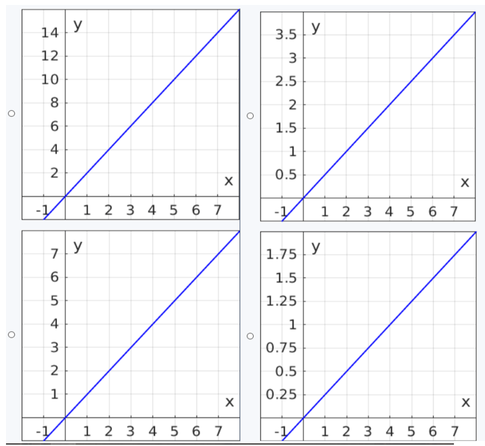


Abb. 2: Beispielitems

Durchführung und Stichprobe

Die Datenerhebung richtet sich speziell an Studierende der Vorlesungen „Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften“ (Biologie, Umweltnaturwissenschaften und Geowissenschaften) und „Mathematik für Studierende der Informatik und der Ingenieurswissenschaften“ (Informatik, Embedded Systems Engineering, Sustainable Systems Engineering, Mikrosystemtechnik, Physik im Nebenfach) im ersten Fachsemester an der Universität Freiburg. In der ersten Vorlesungswoche erhielten alle Studierenden Zugang zum Testinstrument sowie einem Fragebogen zur Erhebung von Hintergrundfaktoren, die im Folgenden erläutert werden.

Der Test wurde den Studierenden online zugänglich gemacht, wobei ihre individuellen Bearbeitungszeiten registriert wurden. Der Test war nur insofern für die Teilnehmenden extrinsisch motiviert, als dass sie sich die Teilnahme (unabhängig vom Ergebnis) als eine von vier zu lösenden Aufgaben auf dem ersten der wöchentlichen Übungszettel der Vorlesung anrechnen lassen konnten. Für die Klausurzulassung am Ende des Semesters müssen 50% der Punkte aller Übungszettel erreicht werden. Es bestanden keine weiteren Incentives.

Hintergrundfaktoren

Neben demographischen Daten (Alter, Lebensjahre in Deutschland, Geschlecht, Studienfach, Abiturnote, erreichte Punktzahl in letzter schulischer Mathematikprüfung, Abiturnote, Bundesland in dem Abitur absolviert wurde, Vorkursteilnahme) wurden Skalen zur Computer-Affinität (Hertel et al. 2014), zur allgemeinen Selbstwirksamkeitserwartung (Beierlein et al. 2012) und zum mathematikbezogenen Selbstkonzept (Wendt et al. 2017) erhoben. Die Computer-Affinität der Studierenden wurde erhoben, um Zusammenhänge zur Testleistung messen zu können, da unklar ist, inwiefern die Digitalisierung des genutzten Testinstruments FALKE Einfluss auf die Bearbeitungsweise nimmt.

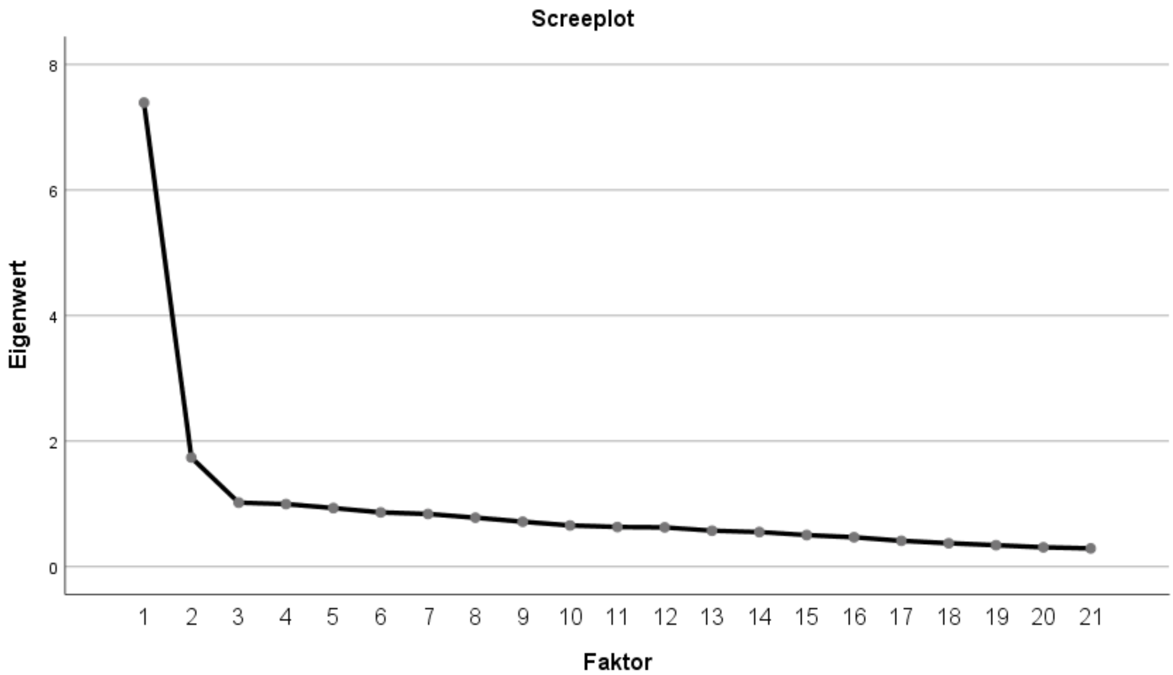
Ergebnisse

Demographie

Von den 353 Studierenden (39% weiblich), die für die Teilnahme an der Studie gewonnen werden konnten, sind 165 Studierende der Naturwissenschaften und 188 Studierende der Ingenieurswissenschaften. Die Gruppen der zwei Fachrichtungen unterscheiden sich hinsichtlich der Geschlechterverteilung deutlich (Naturwissenschaften: 64 % weibliche, 36 % männliche Studierende; Informatik/Ingenieurwissenschaften: 17 % weibliche, 83 % männliche Studierende). Neben 314 Studierenden, die schon immer in Deutschland leben, geben 10 Studierende an, erst seit einem Jahr oder weniger in Deutschland zu leben. 321 der Studierenden haben die Allgemeine Hochschulreife. Von den 353 teilnehmenden Studierenden haben 189 (53,5%) zuvor einen Mathematik-Vorkurs besucht.

Faktorenanalyse und Reliabilitätsanalyse

Eine explorative Faktorenanalyse zeigt, dass die Items des entwickelten Testinstruments entsprechend der theoretischen Zuordnung auf zwei Faktoren laden. Die Items (11-21), in denen der *Veränderlichenaspekt* von Variablen im Vordergrund stehen, laden auf den ersten Faktor (vgl. Abb. 3). Die Items 1-10, die in der theoretischen Zuordnung den Variablenaspekten *Unbekannte oder Unbestimmte* zugeordnet werden, laden auf dem zweiten Faktor. Für die elf Items, die bei der Faktorenanalyse auf den ersten Faktor laden (hierbei handelt es sich ausschließlich um Items aus dem Test-Instrument von Klinger 2018), liegt Cronbachs-α bei 0,866 mit korrigierten Trennschärfen zwischen 0,559-0,748. Bei den zehn zehn Items, die auf den zweiten Faktor laden, liegen Cronbachs-α mit 0,727 und Trennschärfen mit Werten zwischen 0,286-0,536 deutlich niedriger.



Variable als Unbekannte oder Unbestimmte	I	II	Variable als Veränderliche	I	II
1) Punktmuster	.099	.478	11) Ableiten	.544	.420
2) Formel aufstellen	.199	.449	12) Funktionswerte	.664	.247
3) Binomische Formel	.057	.667	13) Ableitung	.702	.192
4) Potenzgesetze	.086	.602	14) Transformation	.537	.448
5) Produkt- und Kettenregel	.212	.326	15) Weg-Zeit	.777	.259
6) Klammern und Vorzeichen	.069	.484	16) Graphen	.601	.252
7) Binomische Formel	.147	.533	17) Kegel	.777	.036
8) Potenzgesetze anwenden	.300	.607	18) Koordinatensystem	.721	.165
9) Bruchgleichung lösen	.420	.447	19) Ableitung I	.678	.311
10) Quadratische Gleichungen	.422	.528	20) Ableitung II	.565	.265
			21) Schwimmbecken	.811	.007

Abb. 3: Screeplot zur explorativen Faktorenanalyse und Rotierte Komponentenmatrix

Die explorative Faktorenanalyse bestätigt also die theoretisch getroffene Zuordnung, sodass im Weiteren bezogen auf FF 1 (Inwiefern können mithilfe eines digitalen Testinstruments Rückschlüsse auf algebra- und funktionenbezogenes Vorwissen von INT-StudienanfängerInnen gezogen werden?) ein Vergleich der im Mittel erreichten Scores für die jeweilige Skala Hinweise darauf geben kann, ob die Studierenden über unterschiedliche Voraussetzungen bzgl. der Aktivierung von Variablenaspekten verfügen.

Im Mittel erreichen die Studierenden einen Gesamtscore von 21,1 Punkten (bei max. 33

Item 6: Klammern und Vorzeichen	**Item 7: Binomische Formel**
Vereinfache so weit wie möglich: $-(\mathbf{3ab} - (\mathbf{b}(\mathbf{a} - \mathbf{2}) + \mathbf{4b}))$	Vereinfache so weit wie möglich: $\frac{4 - t^2}{4 - 4t + t^2}$

Abb. 4: Testitems 6 und 7

möglichen Punkten, SD = 8,42), wobei für die 21 Aufgaben jeweils zwischen ein und drei Punkte vergeben werden. In sieben Items erreichen über 40 % der Studierenden null Punkte. In zwei Items sind es über 70 % der Studierenden, die keine Punkte erreichen (Item 6: Klammern und Vorzeichen und Item 7: Binomische Formel; siehe Abb. 4). Die Trennschärfen dieser Aufgaben liegen bei 0,305 (Item 6) und 0,417 (Item 7). Auch Studierende mit guten bis sehr guten Mathematik-Schulnoten sind zu großen Teilen nicht in der Lage, diese Items korrekt zu lösen: 34 (Item 6) bzw. 42 (Item 7) von insgesamt 95 Studierenden mit 13 bis 15 Punkten in der letzten Mathematikprüfung lösen diese Items erfolgreich.

Es ist anzumerken, dass in Item 3 bereits die zweite und dritte binomische Formel, unter Angabe einer der Seiten der Gleichung, vervollständigt werden sollen. Dieses Item lösen 62,3 % der Studierenden. Das bedeutet auch, dass mindestens die Hälfte dieser Studierenden, die eine binomische Formel in Item 3 vervollständigen können, diese nicht für die Vereinfachung eines Bruchs erfolgreich anwenden können. Diese Zahlen bestätigen die von Altieri aufgezeigten Unterschiede in Kalkülkenntnis und Kalkülferigkeit von INT-Studierenden (Altieri 2016).

Für die 10 Items, die auf den zweiten Faktor (Variable als Unbekannte oder Unbestimmte) laden und für die maximal 14 Punkte vergeben werden, liegt der Mittelwert der erreichten Punkte bei M = 8,36. Bei den Items, die auf den ersten Faktor laden (Variable als Veränderliche) werden im Mittel 12,78 von 19 Punkten erreicht. Der statistische Vergleich der Mittelwerte zeigt, dass die Studierende in der Bearbeitung der Aufgaben, die auf den ersten Faktor laden (Variable als Veränderliche) signifikant besser abschneiden (T-Test: $t(352) = -18{,}842$, $p < 0{,}001$; $d = 0{,}96$).

Zusammenhang von Testleistung und Hintergrundfaktoren

R	R-Quadrat	Korrigiertes R-Quadrat	Standardfehler
0,497	0,247	0,225	7,48791
	Beta	T	Sig
Selbstkonzept	0,275	3,520	0,000
Lebensjahre in Deutschland	0,168	3,321	0,001
Punkte in Ma-theprüfung	0,151	1,933	0,054
Bundesland	-0,131	-2,571	0,011
Vorkursteilnahme	-0,105	-2,097	0,037

Abb. 5: Regressionstabelle

Zur Beantwortung von FF 2 (Welche Zusammenhänge zeigen sich zwischen Testleistungen und den erhobenen Hintergrundfaktoren: Demographische Daten, Computer-Affinität, allgemeine Selbstwirksamkeitserwartung und mathematisches Selbstkonzept?) wurde eine Korrelationsanalyse sowie eine lineare Regressionsanalyse mit abhängiger Variable „erreichte Punktzahl im Test“ vorgenommen.

Bei der Korrelationsanalyse nach Pearson werden folgende Variablen signifikant: Studienfach, Geschlecht, Lebensjahre in Deutschland, Bundesland, Abiturnote, erreichte Punkte in letzter Mathematikprüfung, Vorkursteilnahme, Selbstwirksamkeitserwartung, mathematikbezogenes Selbstkonzept (Abb. 5).

Es zeigt sich, dass Studierende des Ingenieurswesens ($M = 22{,}98$) gegenüber Studierenden der Naturwissenschaften ($M = 18{,}87$) eine signifikant höhere Punktzahl erreichen (T-Test: $t(328{,}646) = 4{,}573$, $p < 0{,}001$; $d = 0{,}49$). Ebenso lässt sich ein signifikanter Unterschied zwischen den Mittelwerten der erreichten Punktzahlen im Test von weiblichen ($n=137$) und männlichen ($n=212$) Studierenden feststellen (w: $M = 19{,}68$, m: $M = 22{,}05$; $t(304{,}230) = -2{,}635$; $p = 0{,}009$; $d = 0{,}29$).

Mittels linearer Regression können bezogen auf die Testleistung 24,7 % der Varianz aufgeklärt werden. Der stärkste Prädiktor (27,5 %) für das Testergebnis ist das mathematikbezogene Selbstkonzept. Weitere Varianz wird durch die Lebensjahre in Deutschland (16,8 %), erreichte Punkte in der letzten schulischen Mathematikprüfung (15,1 %) und das Bundesland (13,1 %) erklärt. Auch für die Vorkursteilnahme besteht mit 10,5 % Varianzaufklärung noch ein statistisch signifikanter Zusammenhang.

Zusammenfassung und Einschränkungen

Die explorative Faktorenanalyse deutet darauf hin, dass tatsächlich ein zweidimensionales Modell bei dem entwickelten Testinstrument angenommen werden kann. Dabei laden die dem Testinstrument FALKE entnommenen Items (11-21) zum Funktionalen Denken (Variable als *Veränderliche*) auf dem ersten Faktor. Die u.a. dem Cosh-Mindestanforderungskatalog entnommenen Items (1-10), die den Variablenaspekten der *Unbekannten oder Unbstimmten* zugeordnet wurden, laden einheitlich auf dem zweiten Faktor.

Cronbachs-α liegt für die beiden Skalen jeweils in einem akzeptablen Bereich. Es sei jedoch angemerkt, dass an dieser Stelle nicht endgültig geklärt werden kann, ob die analysierten Faktoren und Skalen tatsächlich der Unterscheidung von Variablenaspekten entsprechen. Es ist denkbar, dass die Unterscheidung in der Faktorenanalyse auf anderen Aspekten beruhen könnte.

Schwierigkeiten hatten die Studierenden, wie auch in anderen Untersuchungen (z.B. Knospe 2011) vor allem beim Ausführen von Basisprozeduren (Item 6 und 7). Die in der Schulmathematik erst in der Oberstufe behandelten Konzepte zum funktionalen Denken scheinen, im Gegensatz zu den in der Mittelstufe behandelten Prozeduren zu Termumformungen und zum Auflösen von Gleichungen, tiefer verankert zu sein oder sind eventuell noch frischer in Erinnerung. Insgesamt fällt es den Studierenden (signifikant) schwerer, Items mit Variablen als *Unbekannter oder Unbestimmter* zu lösen.

Bezogen auf die Frage, welche Zusammenhänge zwischen Testleistungen und bestimmten Hintergrundfaktoren sichtbar werden, erweist sich als stärkster Prädiktor für den Testerfolg das mathematikbezogene Selbstkonzept. Doch auch weitere Faktoren stehen in Zusammenhang mit der Testleistung (Studienfach, Geschlecht, Lebensjahre in Deutschland, Bundesland, Abiturnote, erreichte Punkte in letzter Mathematikprüfung und Selbstwirksamkeitserwartung). Es zeigt sich auch, dass die Vorkursteilnahme positiven Einfluss auf die Testergebnisse hat, was für die Diskussion um die Wirksamkeit von Vorkursen interessant ist. Eingeschränkt werden müssen die Zusammenhangsanalysen jedoch vor dem Hintergrund, dass keine Erhebung der allgemeinen kognitiven Leistungen stattgefunden hat.

Anknüpfend an diese Zwischenergebnisse werden in weiteren Analysen nun die Zusammenhänge zwischen Testleistung und ihrer Vorhersagekraft für Klausurerfolg (zur Vorlesung „Mathematik für Umwelt- und Naturwissenschaften“ bzw. „für Ingenieurwissenschaften und Informatik“) von Studierenden am Ende des ersten Semesters untersucht.

Literatur

Akinwunmi, K. (2012). *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster* (Dissertation). Wiesbaden: Springer.

Altieri, M. (2016). *Erfolg in Mathematikklausuren ingenieurwissenschaftlicher Studiengänge unter besonderer Berücksichtigung prozeduralen Wissens* (Dissertation). Dortmund.

Blömeke, S. (2016). Der Übergang von der Schule zur Hochschule. Empirische Erkenntnisse zu mathematikbezogenen Studiengängen. In A. Hoppenbrock et al. (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 3–13). Wiesbaden: Springer.

Cooparation Schule:Hochschule (2014). *Mindestanforderungskatalog Mathematik (Version 2.0) der Hochschulen Baden-Württembergs für ein Studium von WiMINT-Fächern*. https://lehrerfortbildung-bw.de/u_matnatech/mathematik/bs/bk/cosh/katalog/index.html (zugegriffen: 2.2.2019).

Deci, E. L. & Ryan, R. M. (1985). *Intrinsic motivation and self-determination in human behavior*. New York: Plenum.

Derr, K., Hübl, R. & Ahmed, Z. (2018). Prior knowledge in mathematics and study success in engineering. Informational value of learner data collected from a web-based pre-course. *European Journal of Engineering Education EJEE*, *43*(6), 911–926.

Dieter, M. & Törner, G. (2012). Vier von fünf geben auf. Studienabbruch und Fachwechsel in der Mathematik, *Forschung u. Lehre, 12*(10), 826–827.

Dieter, M. (2012). *Studienabbruch und Studienfachwechsel in der Mathematik. Quantitative Bezifferung und empirische Untersuchung von Bedingungsfaktoren* (Dissertation). Duisburg/Essen.

Engelbrecht, J., Bergsten, C. & Kagesten, O. (2009). Undergraduate students' preference for procedural to conceptual solutions to mathematical problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40*(7), 927–940.

Engelbrecht, J., Bergsten, C. & Kagesten, O. (2012). Conceptual and procedural approaches to mathematics in the engineering curriculum. Student conceptions and performance. *Journal of Engineering Education*, *101*(1), 138–162.

Engelbrecht, J., Harding, A. & Potgieter, M. (2005). Undergraduate students' performance and confidence in procedural and conceptual mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *36*(7), 701–712.

Feldt-Caesar, N. (2017). *Konzeptualisierung und Diagnose von mathematischem Grundwissen und Grundkönnen. Eine theoretische Betrachtung und exemplarische Konkretisierung am Ende der Sekundarstufe II*. Wiesbaden: Springer.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Band 1. Stuttgart: Klett.

Greefrath G., Koepf W. & Neugebauer C. (2017). Is there a link between preparatory course attendance and academic success? A case study of degree programmes in electrical engineering and computer science. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *3*(1), 143-167.

Hell, B., Linsner, M. & Kurz, G. (2008). Prognose des Studienerfolgs. In M. Rentschler & H. P. Voss (Hrsg.), *Studieneignung und Studierendenauswahl – Untersuchungen und Erfahrungsberichte* (S. 132-177). Aachen: Shaker.

Heublein, U. & Schmelzer, R. (2018). *Die Entwicklung der Studienabbruchquoten an den deutschen Hochschulen. Berechnungen auf Basis des Absolventenjahrgangs 2016*. Hannover: DZHW.

Heublein, U., Ebert, J., Hutzsch, Ch., Isleib, S., König, R., Richter, J. & Woisch, A. (2017). *Zwischen Studienerwartungen und Studienwirklichkeit. Ursachen des Studienabbruchs, beruflicher Verbleib der Studienabbrecherinnen und Studienabbrecher und Entwicklung der Studienabbruchquote an deutschen Hochschulen*. Hannover: DZHW.

Klinger, M. (2018). *Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis. Entwicklung eines Testinstruments und Empirische Befunde aus der gymnasialen Oberstufe* (Dissertation). Wiesbaden: Springer.

Knospe, H. (2012). Zehn Jahre Eingangstest Mathematik an Fachhochschulen in Nordrhein-Westfalen. In *Proceedings zum 10. Workshop Mathematik in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen* (S. 19–24). Mülheim an der Ruhr: Hochschule Ruhr-West.

Kokkelenberg, E.C. & Sinha, E. (2010). Who succeeds in STEM-studies? An analysis of Binghamtion University undergraduate students. *Economics of Education Review*, *29*, 935–946.

Liebendörfer, M. (2018). *Motivationsentwicklung im Mathematikstudium* (Dissertation). Wiesbaden: Springer.

Malle, G., Wittmann, E. & Bürger, H. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Wiesbaden: Springer.

Mathematikunterricht und Kompetenzorientierung – ein offener Brief (2017). https://www.mathematik.de/dmv-blog/1464-ein-brandbrief-und-seine-folgen (zugegriffen: 2.2.2019).

Neumann, I., Pigge, C. & Heinze, A. (2017). *Welche mathematischen Lernvoraussetzungen erwarten Hochschullehrende für ein MINT-Studium? – eine Delphi-Studie*. Kiel. http://www.ipn.uni-kiel.de/de/das-ipn/abteilungen/didaktik-der-mathematik/forschung-undprojekte/malemint (zugegriffen: 1.2.2019).

Rach, S. & Ufer, S. (2018). Welches Wissen brauchen Mathematikstudierende für einen erfolgreichen Studieneinstieg? Eine Reanalyse von Daten aus mehreren Studieneingangsbefragungen. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (Bd. 3, 1443–1446). Münster: WTM-Verlag.

Rach, S. & Heinze, A. (2017). The transition from school to university in mathematics. Which influence do school-related variables have? *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(7), 1343–1363.

Siebel, F. (2005). *Elementare Algebra und ihre Fachsprache. Eine allgemeinmathematische Untersuchung*. Mühltal: Verlag Allgemeine Wissenschaft.

Silver, E. (1986). Using conceptual and procedural knowledge. A focus on relationships. In J. Hiebert (Hrsg.), *Conceptual and Procedural knowledge. The case of mathematics* (S. 181–198). New York: Lawrence Erlbaum.

Söderling, J. & Geschwind, L. (2017). More students of better quality? Effects of mathematics and physics apitude test on student performance. *European Journal of Engineering Education*, *42*, 445–457.

Vieth-Entus, S. (2017, 30. März). 50 Professoren verurteilen Mathe-Brandbrief als „schädlich“. *Der Tagesspiegel*. https://www.tagesspiegel.de/berlin/streit-um-bildungsstandards-50-professoren-verurteilen-mathe-brandbrief-als-schaedlich/19590112.html (zugegriffen: 31. Januar 2019).

Vollrath, H.-J. & Weigand, H.-G. (2007[3]). *Algebra in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Springer Spektrum.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *10*(1), 3–37.

Warnecke, T., Burchard, A. & Kühne, A. (2017). Der Aufstand der Mathelehrer. Brandbrief gegen Bildungsstandards. *Der Tagesspiegel*. https://www.tagesspiegel.de/wissen/brandbrief-gegen-bildungsstandards-der-aufstand-der-mathelehrer/19550928.html (zugegriffen: 2.2.2019).