Masterarbeit zur Erlangung des akademischen Grades

Master of Education

Hypothesen zur Ursache geschlechtsspezifischer Leistungsdifferenzen in Mathematik mit einem speziellen Fokus auf lineare Funktionen

---

Vorgelegt dem Fachbereich Didaktik der Mathematik der Universität Duisburg-Essen

Erstgutachter: Dr. Marcel Klinger
Zweitgutachter: Prof. Dr. Bärbel Barzel

Sommersemester 2018

---

vorgelegt von: Vanessa Gorski

[redacted]

Abgabefrist: [redacted]

Abgegeben am: 09.08.2018

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

1.1 Ausgangssituation und Relevanz des Themas

Die Mathematik ist eine Schlüsseltechnologie in unserer Gesellschaft, ohne deren Wissen die meisten modernen technischen Anwendungen undenkbar wären. Mathematik findet tagtäglich in unserem Leben statt und nimmt dementsprechend auch einen wichtigen Bestandteil innerhalb des Schulunterrichts ein.

> *„Die Mathematik ist […] als Basisqualifikation gewissermaßen Teil der kulturellen Alphabetisierung. […] [Sie] erhält den Charakter eines grundlegenden Kulturwerkzeugs, dessen Beherrschung zur Voraussetzung einer verständigen und verantwortungsvollen Teilnahme am gesellschaftlichen Leben werde.“ (Klieme et al. 2000, S. 85f.)*

Wie Klieme et al. ausführen, hat die Mathematik eine zentrale Rolle innerhalb unserer Kultur; sie trägt sogar maßgeblich dazu bei, erfolgreich am gesellschaftlichen Leben teilzunehmen. Das Thema Funktionen nimmt einen Großteil des gesamten Mathematikunterrichts ein. Bereits in der Grundschule werden funktionale Zusammenhänge als Rätsel eingesetzt. Ab der Sekundarstufe 1 wird dieses Thema letztlich systematisch bearbeitet. Aufgrund der großen Wichtigkeit des Themas, ist es nun von Bedeutung, das Verständnis von Schülerinnen und Schülern zum Thema lineare Funktionen näher zu betrachten. Weitergehend ist seit einem längeren Zeitraum bekannt, dass Mädchen im Fach Mathematik benachteiligt würden. Doch warum gilt dies im Themenfeld der linearen Funktionen? Die Arbeit schließt an die Ergebnisse von Marcel Klinger an, welcher herausgefunden hat, dass solche Differenzen auch im Inhaltsfeld Funktionen vorherrschen. Doch wo genau liegen die Gründe hierfür? Schließlich würde das Aufdecken solcher Gründe eine bessere Förderung von Mädchen ermöglichen. Auch ein besseres Fordern der Jungen wäre denkbar. Aus diesem Grund beschäftigt sich die folgende Arbeit mit dem Thema *„Hypothesen zur Ursache geschlechtsspezifischer Leistungsdifferenzen in der Mathematik mit einem speziellen Fokus auf lineare Funktionen“.*

1.2 Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit setzt sich aus einem Theorie-, einem Empirieteil und der Datenauswertung zusammen, die am Ende der Arbeit analysiert und kritisch reflektiert werden. Innerhalb des theoretischen Hintergrunds wird zunächst auf den Funktionsbegriff eingegangen. In diesem Abschnitt wird der Begriff der linearen Funktion definiert, sowie auf die Grundvorstellungen und Repräsentationsformen eingegangen. Weitergehend werden typische Schülerschwierigkeiten beschrieben. Anschließend folgt ein Einblick in den Zusammenhang von Mathematik und Gender. Hier spielen das Interesse von Schülerinnen und Schülern und einige Erklärungsansätze für die Partizipationsansätze eine Rolle. Geschlossen wird dieses Kapitel durch das Eingehen auf den aktuellen Forschungsstand. In der Empirischen Umsetzung wird zunächst die Fragestellung erörtert. Weitergehend wird diese gestützt durch aus der Theorie abgeleitete Hypothesen, welche dabei helfen sollen die Fragestellung zu beantworten. Anschließend folgt ein Kapitel über die Forschungsmethode des klinischen Interviews, welches als Forschungsinstrument gewählt wurde. Die folgende Beschreibung der Materialentwicklung wird durch mögliche Interviewfragen gestützt. Abschließend dieses Kapitels folgt die Vorstellung der Testpersonen. Die anschließende Datenauswertung wird in die Analysen der einzelnen Interviews unterteilt. Diese Ergebnisse werden folglich zusammengefasst und reflektiert, um einen Überblick über die Aussagekraft der Ergebnisse treffen zu können. Zum Ende folgt eine Schlussbemerkung, welche eine Reflexion und einen möglichen Ausblick beinhaltet.

2. Theoretischer Hintergrund

2.1 Funktionen

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird es, wie eingangs geschildert, um den Vergleich der Denkweisen von Jungen und Mädchen zum Thema lineare Funktionen gehen. Hierzu ist es zunächst wichtig den Begriff der Funktion näher zu betrachten, da dieser den Grundgedanken für das Funktionale Denken bildet. Funktionale Zusammenhänge, und demnach auch Funktionen, sind verankert im alltäglichen Leben. Schließlich lassen sich Bremswege oder Kostenkalkulationen durch Funktionen darstellen. Folglich sollte der Thematisierung von Funktionen im Mathematikunterricht eine große Bedeutung zugesprochen werden. Auch sollten Funktionen im Unterricht definiert werden. Büchter et al. (2010) geht von folgender Definition aus:

> *„Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung der Elemente einer nicht-leeren Menge A zu den Elementen einer Menge B, geschrieben: $f{:}A \rightarrow B$. Dabei wird jedem Element $x \in A$ ein Element $y \in B$ zugeordnet, geschrieben $x \rightarrow y = f(x)$. A wird dann als Definitionsmenge bezeichnet, B als Zielmenge und $f(A)=\{f(x) \mid x \in A\}$ als Wertemenge. Für $A, B \in R$ lässt sich der Funktionsgraph mit f in einem Koordinatensystem darstellen, genauer ist der Graph die Menge $G_1= \{(x \mid f(x)) \mid x \in A\}$ (Büchter et al. 2010, S. 18)."*

Der Fokus dieser Definition liegt in der Eindeutigkeit der Zuordnung von Mengen. Das bedeutet konkret, dass jedem x-Wert nur genau ein y-Wert zugeordnet werden kann. Greefrath et al. (2016) fasst dies in seinem Buch *Didaktik der Analysis – Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe* wie folgt zusammen: *„Seien A und B Mengen: Eine Zuordnung, die* *jedem Element der Menge A genau ein Element der Menge B zuordnet, nennt man Funktion (Greefrath et al. 2016, S. 44).“* Diese Definition ist für viele Schülerinnen und Schüler verständlicher, sodass diese in den meisten Schulbüchern verwendet wird. Zu Beginn dieses Kapitels wurde auch der Begriff Funktionale Zusammenhänge angeführt. Der Unterschied zwischen Funktionen und Funktionalen Zusammenhängen besteht darin, dass Funktionen einen innermathematischen Zusammenhang beschreiben, wohingegen Funktionale Zusammenhänge in einem außermathematischen Kontext vorzufinden sind. Demnach lassen sich Funktionale Zusammenhänge durch Funktionen beschreiben. Im Kontext dieser Arbeit wird ausschließlich mit linearen Funktionen gearbeitet, sodass auch eine Definition dieses Begriffs Bedeutung trägt. Nach Büchter et al. (2010) werden Lineare Funktionen bereits im frühen Grundschul-alter in Form von Rätseln verwendet. Zudem stellt die Lineare Funktion meist den ersten Typen von Funktionen dar, mit denen sich die Lernenden auseinandersetzen. Definieren lassen sich lineare Funktionen wie folgt: *„Eine Funktion f:R→R, die sich mithilfe von geeigneten reellen Konstanten a und b schreiben lässt als f(x)=a*x+b, heißt lineare Funktion (Büchter et al. 2010, S. 44).“* Dabei stellt der Parameter a stets die Steigung der Funktion dar und b den y-Achsenabschnitt.

Grundvorstellungen von Funktionen:

Um einen gezielteren Einblick in das Themenfeld der Funktionen zu erhalten, müssen auch die Grundvorstellung dieses Begriffs berücksichtigt werden. Schließlich bieten diese ein Kriteriensystem für die Auswertung der Denkweisen der Heranwachsenden. Besonders durch die Beschreibung eines Zusammenhangs zwischen einer außer- und einer innermathematischen Situation wird gezeigt, ob eine Grundvorstellung zu einem Begriff verinnerlicht wurde. *„Grundvorstellungen sind mentale Modelle, die die Schnittstelle zwischen Anwendungssituation und den zugehörigen mathematischen Inhalten beschreiben (Wartha et al. 2009, S. 262).“* Weitergehend wird in der Mathematik häufig zwischen zwei Arten von Grundvorstellungen unterschieden. Die primäre Grundvorstellung beschreibt die Schnittstelle zwischen Mathematik und Realsituation (vgl. Büchter at al. 2010, S.30). Sie ist also stark mit der vorherigen Definition von Grundvorstellungen verbunden. Die sekundäre Grundvorstellung geht einen Schritt weiter. *„Sekundäre Grundvorstellungen verbinden einen mathematischen Begriff mit bestehenden Vorstellungen und Darstellungen weiterer mathematischer Begriffe (Greefrath et al. 2016, S. 17).“* Man kann also sagen, dass sekundäre Grundvorstellungen Brücken zwischen unterschiedlichen mathematischen Darstellungsformen bilden.

Um allerdings überhaupt von Grundvorstellungen von Funktionen sprechen zu können, müssen zunächst Variablen betrachtet werden. Schließlich setzen sich Funktionen aus Termen zusammen, welche aus Variablen bestehen. Demnach ist eine Berücksichtigung von Variablen unabdingbar. Bei Variablen geht man in der Mathematikdidaktik von drei verschiedenen Grundvorstellungen aus. Die erste Grundvorstellung von Variablen beschäftigt sich damit, dass Lernende in der Lage sind Skizzen anzufertigen um ein Problem sinngemäß zu beschreiben. Sie wird nach Büchter et al. (2010) als Gegenstandsvorstellung beschrieben, in der die *„Variable als Name für eine feste, noch unbekannte oder (noch) nicht näher bestimmte Zahl (Büchter et al. 2010, S. 32)"* beschrieben wird. Ein Beispiel hierfür bietet die Höhenberechnung h einer Pyramide. Die zweite Grundvorstellung ist die Einsetzungsvorstellung. In der Literatur wird diese häufig dadurch beschrieben, dass die Variable hier als Platzhalter dient (vgl. Büchter at al. 2010, S. 32). Auch in der Grundschule wird diese Vorstellung bereits gefördert, indem mit Leerstellen oder Symbolen, in Form von Rätseln, hantiert wird. Die Letzte Grundvorstellung von Variablen ist die Kalkülvorstellung. Diese betont, *„dass Variablen Symbole sind, mit denen man nach gewissen Regeln operieren darf (Büchter et al. 2010, S. 33)."* Demnach tritt die Kalkülvorstellung insbesondere im Zusammenhang mit der Äquivalenzumformung in den Vordergrund.

Neben der Berücksichtigung der Grundvorstellungen von Variablen, ist auch die Betrachtung der Aspekte von Funktionen von Bedeutung. *„Ein Aspekt eines mathematischen Begriffs ist ein Teilbereich des Begriffs, mit dem dieser fachlich charakterisiert werden kann (Greefrath et al. 2016, S. 17)."* Demnach bilden Aspekte den fachlichen Kern oder Charakterisierung eines Begriffs. Weitergehend ist festzuhalten, dass Aspekte bei der Ausbildung von Grundvorstellungen unterstützen. In der Literatur wird zwischen zwei unterschiedlichen Aspekten des Funktionsbegriffs gesprochen. Zum einen spricht man vom Zuordnungsaspekt. Der Zuordnungsaspekt steht in der Schule meist im Vordergrund und unterscheidet sich nur geringfügig von der Definition einer Funktion. *„Eine Funktion ist eine Zuordnung, die jedem Element einer Menge A genau ein Element einer Menge B zuordnet (Greefrath et al. 2016, S. 47)."* Der zweite Funktionsaspekt ist in seiner Formulierung bereits abstrakter. Betitelt wird er durch den Paarmengenaspekt: *„Eine Funktion f ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts AxB zweier Mengen A und B, bei der für alle $x \in A$ genau ein $y \in B$ existiert it $(x,y) \in f$ (Greefrath et al. 2016, S. 47)."* Schülerinnen und Schüler fallen solche Formulierungen schwerer, sodass er im Unterricht oft unberücksichtigt bleibt.

Auf Basis der Grundvorstellungen von Variablen und der Aspekte von Funktionen lassen sich nun drei Grundvorstellungen von Funktionen herleiten. Die erste Grundvorstellung, die Zuordnungsvorstellung, betrachtet einen isolierten Ausschnitt einer Funktion. Definieren lässt sich dies gut durch die Fragestellung *„Welche Größe wird einer anderen eindeutig zugeordnet (Büchter et al. 2010, S. 24)?"* Weitergehend kann man auch sagen, dass beim Zuordnungsaspekt eine punktuelle Betrachtung einer Funktion erfolgt.

> *„Mit dem Zuordnungsaspekt wird der funktionale Zusammenhang punktuell gesehen. Zu jedem x einer Definitionsmenge gibt es ein y einer Zielmenge mit y=f(x). Der Punkt (x,y) liegt dann auf dem Funktionsgraphen (Greefrath et al. 2016, S. 48).“*

Man kann also sagen, dass bei der Zuordnungsvorstellung von Funktionen ein Wertepaar (x, y) in horizontaler Richtung betrachtet wird. Die Kovariationsvorstellung hingegen betrachtet die Änderung von einem x-Wert mit der Änderung von einem y-Wert in vertikaler Richtung. Es wird also ein lokaler Bereich der Definitions- und Wertemenge betrachtet. Greefrath et al. (2016) beschreibt, dass *„Änderungen der Variable x und y sowie der Verlauf des Graphens betrachtet (S. 49)“* werden. Gestützt werden kann dies durch die Fragestellung *„Wie verändert sich eine Größe mit einer anderen (Büchter et al. 2010, S. 24)?“* Die letzte Grundvorstellung von Funktionen ist die Objektvorstellung. Gegensätzlich zur Zuordnungs- und Kovariationsvorstellung berücksichtigt diese nicht bloß einzelne Wertepaare und Änderungen. Bei der Objektvorstellung wird die Funktion als Ganzes in den Blick genommen. Darunter sind Eigenschaften wie die Monotonie, die Existenz von Nullstellen oder die Symmetrie zu verstehen. Betrachtet man demnach eine Funktion hinsichtlich der Objektvorstellung, so kann man diese in seinen speziellen Eigenschaften beschreiben (vgl, Büchter et al. 2010, S. 35 und Greefrath et al. 2016, S. 49).

<u>Repräsentationsformen von Funktionen:</u>

Um überhaupt von einem tragfähigen Verständnis, also der Verinnerlichung der Grundvorstellungen sprechen zu können, sind verschiedene Darstellungsformen unabdingbar.

> *„Zu einem verständnisvollen Umgang von Funktionen gehört auch, verschiedene Darstellungen zu interpretieren, zu erstellen, anzuwenden, Beziehungen zwischen den Darstellungsformen zu erkennen und je nach Zweck zwischen ihnen zu Wechseln (Greefrath et al. 2016, S. 59).“*

Es kann also nur von einem verständnisvollen Umgang gesprochen werden, sofern ein Wechsel zwischen den Darstellungsebenen flexibel möglich ist. Klinger (2018) und Büchter (2010) gehen von vier verschiedenen Möglichkeiten aus, Funktionen darzustellen. Zunächst gibt es die verbale oder situativ sprachliche Darstellungsart. Diese ist eng verknüpft mit Situationsbeschreibungen oder Textaufgaben in denen funktionale Zusammenhänge beschrieben werden. Greefrath et al. (2016) beschreibt, dass auch eine umgekehrte Betrachtung hier berücksichtigt werden muss. Er macht klar, dass auch das Finden einer geeigneten Situation zu einem gegeben Funktionsgraphen oder einer Funktionsgleichung der verbalen Darstellungsform zuzuordnen ist (S. 56). Als zweites ist die numerische oder numerisch tabellarische Darstellungsebene zu nennen. Hierunter sind insbesondere Wertetabellen zu verstehen, die einen funktionalen Zusammenhang beschreiben. Greefrath (2016) beschreibt in diesem Zusammenhang, dass insbesondere der Paarmengen- und der Zuordnungsaspekt durch Wertetabellen verdeutlicht werden. Schließlich werden zueinander gehörige Werte klar neben- oder untereinander dargestellt (S. 54). Auch Büchter et al. (2010) macht klar, dass ein Vorteil tabellarischer Darstellungen ein direktes Ablesen zusammen passender Wertepaare darstellt (S. 35 f.). Als drittes ist die algebraische, oder formal symbolische Repräsentationsform zu nennen. Hier wird die Zuordnung *„durch einen algebraischen Term bestimmt (Greefrath et al. 2016, S. 54).“* Ein exaktes Berechnen von einzelnen Funktionswerten wird durch diese Darstellungsform möglich gemacht. Als letztes gibt es die geometrische Darstellungsebene. Klinger (2018) betitelt diese als graphisch visuelle Darstellungsform (S. 61). Der Vorteil graphischer Darstellungen ist, dass *„funktionale Zusammenhänge visuell fassbar gemacht werden (Greefrath et al. 2016, S. 51)“* können. Hier unterscheidet man zwischen zwei Formen graphischer Darstellungen. Zum einen können Pfeildiagramme Funktionen veranschaulichen. Diese sind insbesondere dann geeignet, wenn die Definitions- und Zielmenge einer Funktion visualisiert werden sollen. Somit unterstützt sie die Zuordnungsvorstellung von Funktionen. Sinnvoll ist eine solche Darstellung allerdings nur, wenn die Definitionsmenge eine überschaubare Anzahl an Daten besitzt. Bei einer großen Datenmenge wirkt ein Pfeildiagramm eher unübersichtlich (vgl. Greefrath et al. 2016, S. 51 f.). Weitergehend können Koordinatensysteme Funktionen bildbar machen. *„Die Begriffsbildung zum Graphen einer Funktion f kann dabei unmittelbar an den Zuordnungsaspekt, als auch den Paarmengenaspekt von Funktionen anknüpfen (Greefrath et al. 2016, S. 53).“* Dabei können alle drei Vorstellungen von Funktionen gefördert werden. Die Zuordnungsvorstellung wird gefördert, da Graphen ein direktes Ablesen zueinander passender Wertepaare ermöglicht. Schließlich führt ein Liniengang vom x-Wert hin zum Graphen bis zur y-Achse zu einem gesuchten Wertepaar. Weitergehend kann die Kovariationsvorstellung gestärkt werden, da durch die Betrachtung einer Umgebung eines Punktes das lokale Änderungsverhalten der Funktion verdeutlicht wird. Die Objektvorstellung wird gefördert, weil der Graph die Funktion als Ganzes darstellt. Demnach können die Eigenschaften einer Funktion anhand des Graphens leicht bestimmt werden.

Erst wenn ein Wechsel zwischen den vorgestellten Repräsentationsformen unproblematisch erscheint, kann von einem tragfähigen Verständnis gesprochen werden. Insbesondere muss eine Ganzheitlichkeit im Verständnis erreicht werden, welches durch das bloße kennen einer Darstellungsform nicht erreicht wird.

Funktionales Denken:

Auf Basis der zuvor vorgestellten Theorie zu Funktionen lässt sich nun der Begriff des Funktionalen Denkens definieren. Klinger (2018) definiert diesen Begriff in seinem Buch *„Funktionales Denken beim Übergang der Funktionslehre zur Analysis“* nach Büchter wie folgt:

> *„Funktionales Denken soll verstanden werden als Denken in funktionalen Zusammenhängen, bei dem das Änderungsverhalten der beteiligten Größen im Mittelpunkt steht. In diesem Verständnis müssen Funktionen als abstrakte Objekte, mit denen funktionale Zusammenhänge beschrieben werden können, keine explizite Rolle spielen, vielmehr steht der Zusammenhang zwischen Größen im Sinne der Kovariationsvorstellung im Vordergrund (Klinger 2018, S. 55).“*

Der Fokus dieser Definition liegt in der Kovariationsvorstellung. Wie bereits erklärt, beschäftigt sich diese mit der Werteänderung in vertikaler Richtung. Eine einfachere Definition bietet Greefrath (2016): *„Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist (Greefrath et al. 2016, S. 69).“* Hier wird insbesondere die enge Verbundenheit zum Funktionsbegriff deutlich. Allerdings ist es laut Greefrath ebenfalls wichtig, dass im Mathematikunterricht drei Aspekte berücksichtigt werden müssen um das Funktionale Denken zu fördern. Dazu gehört zum einen, dass Grundvorstellungen zu Funktionen situationsangemessen genutzt werden müssen und zwischen ihnen flexibel gewechselt werden muss. Weitergehend sollten unterschiedliche Phänomene in den Unterricht integriert werden, die das Verstehen funktionaler Zusammenhänge fördern. Konkret beschreibt Greefrath dies als *„Phänomene, denen funktionale Zusammenhänge zugrunde liegen, erfassen, beschreiben sowie Zusammenhänge interpretieren und für Problemlösungen verwenden (Greefrath et al. 2016, S. 70).“* Als letztes führt er an, dass auch zwischen Darstellungsformen gewechselt werden muss. Zudem müssen diese interpretiert und zur Problemlösung genutzt werden können. Es ist also festzuhalten, dass der Begriff Funktionales Denken ein Arbeiten und Verstehen des Funktionsbegriffes erfordert. Schließlich schließt der Begriff des Funktionalen Denkens alle wichtigen Grundvorstellungen, Repräsentationsformen und Aspekte zusammen, sodass der verständliche Umgang mit Funktionen eng mit dem Funktionalen Denken verbunden ist.

Typische Schülerschwierigkeiten:

Um im Verlauf der Arbeit ein Rückschluss der Gedankengänge der Schülerinnen und Schüler auf die Literatur vorzunehmen, ist auch die Berücksichtigung typischer bekannter Schülerfehler von Bedeutung. Nitsch (2014) geht in ihrem Artikel *„Schülerfehler verstehen – typische Fehlermuster im funktionalen Denken“* auf einige Schwierigkeiten ein. Zunächst erläutert sie, dass eines die häufigsten Fehler bei der Aufstellung einer Gleichung zu einem gegebenen

Graphen entstehen können. Dies liegt insbesondere daran, dass der Aufbau der Funktionsgleichung nicht von allen Schülerinnen und Schülern verstanden wird. Die Funktionsgleichung y=m*x+b lässt viele Lernenden vermuten, dass die Variable x den x-Achsenabschnitt beschreibt. Der Grund hierfür ist, dass die Schülerinnen und Schüler denken, dass es neben einem y-Achsenabschnitt auch einen x-Achsenabschnitt geben muss (vgl. Nitsch 2014, S 8ff.). Weitergehend beschreibt sie in ihrer Dissertation „*Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänger – Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln“* aus dem Jahr 2014, dass die meisten Schülerfehler bei der Bestimmung des y-Achsenabschnitts entstehen da ausschließlich eine Variable berücksichtigt wird. Hierbei handelt es sich schließlich um den Wert y, welcher durch das Einsetzen des Wertes 0 in x bestimmt werden kann (S. 119 f.). Neben dieser Schwierigkeit, haben auch einige Schülerinnen und Schüler Probleme bei der Ermittlung der Steigung m. Die Problematik hinter diesem Wert besteht in der Kovariationsvorstellung. Schließlich müssen die Lernenden bei der Bestimmung der Steigung einer linearen Funktion sowohl die x- als auch die y-Werte betrachten. Ebenfalls treten Fehler häufig bei der Übersetzung mit situativen Beschreibungen auf. Darunter ist der sogenannte Graph-als-Bild-Fehler: *„Der sogenannte Graph-als-Bild-Fehler tritt auf, wenn die Lernenden den Graphen als reales Situationsbild interpretieren (Nitsch 2014, S. 9).“* Die Überlagerung des mathematischen Verständnisses durch das Alltagswissen stellt hier häufig den Grund des Fehlers dar. Als weitere situationsbedingte Schwierigkeit bezeichnet Nitsch (2014) die Lage eines Funktionsgraphens. Schließlich fällt es einigen Schülerinnen und Schülern leicht eine Sachsituation zu einem Graphen zu rekonstruieren, sollte er sich ausschließlich im ersten Quadranten des Koordinatensystems befinden. Verlässt ein Funktionsgraph diesen Wertebereich haben die Heranwachsenden oft Schwierigkeiten eine geeignete Sachsituation zum Abbild zu finden. Einen solchen Graphen betitelt man auch als sogenannten „full domain“ Graphen (vgl. Nitsch 2014, S. 120). Geht man nun konkreter auf die Lernschwierigkeiten ein, die bei Darstellungswechseln entstehen können, so lässt sich die Schwierigkeit der Fact graps anführen. *„Fact graps beziehen sich auf fehlende Informationen innerhalb der Ausgang- oder Zieldarstellung (Nitsch 2014, S. 113).“* Das heißt konkret, dass essentielle Informationen nicht im speziellen Kontext repräsentiert werden. Ein Beispiel hierfür bietet das Fehlen einer Achsenbeschriftung und die hinzugehörige Einteilung derer. Schließlich fällt es einigen Schülerinnen und Schülern schwer eine Einteilung der Achse vorzunehmen, wenn der Funktionsgraph und die zugehörige Funktionsgleichung gegeben sind. Ein weiterer bekannter Fehler ist die Verwechslung der Achsenbeschriftungen. Eine Vertiefung dieses Fehlers stellt die komplette Missachtung der x- und y-Achse dar. Darunter ist zu verstehen, dass diese weder beschriftet, noch die Einteilung berücksichtigt wird.

Fasst man abschließend die gängigsten Schülerschwierigkeiten zum Thema lineare Funktionen zusammen, so ist festzuhalten, dass die meisten Fehler durch den y-Achsenabschnitt entstehen können. Auch die Steigung kann zu Problemen führen. Die Berücksichtigung der Achseneinteilung und –beschriftung kann ebenfalls Probleme bergen, sodass insbesondere asymmetrische Anordnungen zu Fehlern führen können.

2.2 Gender im Mathematikunterricht

Zunächst ist es von Bedeutung die Situation von jungen Frauen in mathematischen Bereichen zu durchleuchten. Hierbei ist anzumerken dass das mathematische Grundverständnis nicht ausschließlich durch die Sozialisation entsteht, sondern angeboren zu sein scheint. Dies wurde bereits durch Laura Martignon (Jahr nicht bekannt) festgehalten: *„Ein gewisses mathematisches Wissen und die Grundausstattung für das mathematische Denken sind angeboren (Martignon n.b., S 3).“* Dieses mathematische Grundverständnis gliedert sich allgemein in fünf Grundsysteme, welche sich auf verschiedene Inhaltsbereiche beziehen. Das erste und zweite Grundsystem sind für das numerische Grundverständnis verantwortlich. Darunter sind das Untersuchen kleiner Kardinalzahlen, sowie das Unterscheiden größerer Mengen zu verstehen. Das zweite Grundverständnis ist für das System logischer Quantifikatoren zuständig. Letztlich werden unter dem vierten und fünften Grundsystem das Verständnis von Geometrie und die Navigation im Raum zusammengefasst. Betrachtet man nun die Zusammensetzung dieser einzelnen Grundsysteme sind bis zum zweiten Lebensjahr keine geschlechtsspezifischen Unterschiede zu erkennen. Dies lässt darauf schließen dass ein gewisses Grundverständnis angeboren ist. Jedoch lassen sich Vermutungen anstellen, dass geschlechtsspezifische Unterschiede aufgrund unterschiedlicher Sozialisierung von Mädchen und Jungen zurückzuführen sind. Ein Beispiel für diese differenzierte Sozialisation bietet die unterschiedliche Spielkultur der Geschlechter. Mädchen spielen eher mit Puppen, wohingegen sich Jungen eher für Lego oder Bausteine interessieren. Da Bausteine und Lego eine höhere Affinität zur Mathematik besitzen, lässt sich die Vermutung anstellen, dass bereits durch die Spielkultur das mathematische Verständnis zwischen den Geschlechtern unterscheidet beziehungsweise unterschiedlich ausbildet(vgl. Martignon n.b., S 3 ff.).

Interesse zur Mathematik

Neben dem angeborenen Grundverständnis spielt auch das Interesse am Fach Mathematik eine große Rolle. Es gibt einige Studien, welche wiederspiegeln, dass sich das Interesse von Mädchen und Jungen zum Fach Mathematik unterscheidet. Hierzu ist es zunächst wichtig den Begriff des Interesses näher einzugrenzen. *„Nach der Person-Gegenstands-Theorie bezeichnet Interesse eine herausgehobene, subjektiv bedeutsam erlebte Beziehung zwischen einer Person und einem Gegenstand ihrer erfahrenen Umwelt (Holstermann et al. 2007, S. 72).“* Damit ist konkret gemeint, dass das Interesse stark mit dem subjektiven Empfinden eines jeden Individuums zusammenhängt. Weitergehend wird in der Literatur häufig zwischen intrinsischem und extrinsischem Interesse unterschieden. Der konkrete Unterschied zwischen diesen Interessensformen liegt darin, dass bei intrinsischem Interesse die Gründe innerhalb einer Person liegen. Entgegengesetzt wird ein extrinsisches Interesse von außen hervorgerufen. Darunter sind beispielsweise das Erreichen eines guten Abschlusses oder das Erhalten guter Zensuren zu verstehen. Auf dieser Basis lassen sich nun verschiedene Studien anführen, die sich konkret mit dem Interesse von Jugendlichen zu naturwissenschaftlichen und mathematischen Inhalten auseinandersetzen. Zunächst ist hier die internationale Studie *„The Relevance of Science Education“* (ROSE-Studie) anzuführen, welche innerhalb Deutschlands mit 145 Mädchen und 117 Jungen das Interesse von Jugendlichen an mathematischen und naturwissenschaftlichen Inhalten untersucht (vgl. Nina Holstermann et al. 2007, S. 71). Die Ergebnisse dieser Studie zeigen, dass Mädchen weniger interessiert an diesen Inhalten scheinen als Jungen. Weitergehend wird in diesem Zusammenhang vermutet, dass sich dies auf die Leistungen in diesen Fächern auswirken. Auch Ralf Benölken (2012) setzt sich näher mit dem Thema Geschlecht und Mathematikunterricht auseinander. Dieser führte eine Fragebogenstudie durch, in der 132 Mädchen und 156 Jungen angeben mussten, inwiefern ihnen verschiedene Mathematikaufgaben Spaß machen würden. Die Ergebnisse zeigen klar, dass sowohl die Mädchen, welche nicht als mathematisch begabt zu identifizieren sind, als auch die Mädchen, welche als mathematisch begabt beschrieben werden können, weniger Spaß an den Aufgaben haben als die Jungen (S. 146). Monika Waldis (2012) beschreibt diesen Zusammenhang konkreter. Sie geht insbesondere auf die Entwicklung innerhalb der Sekundarstufe eins ein.

> *„Empirische Untersuchungen an deutschsprachigen Stichproben belegen ausgeprägte Geschlechterdifferenzen in den Fachinteressen auf der Sekundarstufe 1, sowie einen bei Mädchen stärker ausgeprägten Abwärtstrend in der Entwicklung des Interesses in naturwissenschaftlichen Fächern (Waldis 2012, S. 75).“*

Hiermit geht also klar hervor, dass Mädchen weniger Interesse an mathematisch-naturwissenschaftlichen Inhalten haben. Weitergehend wird deutlich, dass das vorhandene Interesse zu sinken scheint. Zu verknüpfen ist dies auch mit dem Selbstkonzept und der Selbstwirksamkeit von Mädchen. Diese sind neben dem Interesse bei Jungen im mathematischen Bereich deutlich stärker ausgebildet als bei Mädchen (S. 76). Bartsch et al. (2015) macht deutlich, dass eine Polarisierung des Interesses etwa ab der siebten Klasse zu erkennen sind (S. 128). Stöger et al. (2012) erklärt dies durch das Eintreten in die Pubertät (vgl. Stöger et al 2012, S. 65). Er beschreibt dass insbesondere in der Pubertät das Interesse der Mädchen sinkt. Schließlich geben die Mädchen in Befragungen an, dass sie sich weniger Mädchen auf den Mathematikunterricht freuen, sodass man sagen kann, dass der intrinsische Wert des Faches sinkt. Weitergehend geben viele Mädchen in dieser Phase ihrer Entwicklung an, die Bedeutung des Faches als wenig sinnvoll anzusehen.

Erklärungsansätze für die Partizipationsunterschiede

Wie bereits eingangs des Kapitels geschildert *„gehören die mathematischen und räumlichen Fähigkeiten zu den vier Bereichen, in denen konsistent Geschlechterunterschiede zugunsten männlicher Probanden gefunden wurden (Stöger et al. 2012, S. 20).“* Daher ist es wichtig sich in diesem Zusammenhang mit einigen Erklärungsansätzen für diese Partizipationsunterschiede auseinander zu setzen. Lange wurde davon ausgegangen, dass die unterschiedliche Größe des Gehirns von Männern und Frauen Grund für das bessere Verständnis von Männern ist. Schließlich haben Männer durchschnittlich ein 10-15% größeres Gehirn als Frauen. Dieser biologische Erklärungsansatz gilt allerdings als veraltet, da er bis heute nicht bewiesen werden konnte (vgl. Stöger et al. 2012, S. 23). Vielmehr wird heutzutage versucht, den biologischen Erklärungsansatz mit dem sozialen Ansatz zu verknüpfen. Man spricht auch vom biopsychologischen Erklärungsansatz. Inzwischen gehen Neurowissenschaftler

> *„von einer komplexen biopsychosozialen Wechselwirkung aus, bei der neben biologischen Faktoren wie Genen, Hormonen und neuronalen Voraussetzungen auch psychologische Variablen wie Einstellung, Erfahrungen und Geschlechterstereotype eine nicht unwesentliche Rolle spielen (Stöger et al., 2012, S. 23).“*

Wie bereits beschrieben, kann auch hier die Spielzeugkultur von Jungen und Mädchen angeführt werden. Neben den Bauklötzen und Legosteinen ist auch der Umgang mit den digitalen Spielzeugen zu erwähnen. Schließlich ist nachgewiesen, dass Computerspiele einen positiven Einfluss auf das räumliche Vorstellungsvermögen haben können. Da mehr Jungen als Mädchen sich mit Computerspielen beschäftigen, ist auch dies hier von Bedeutung. Allerdings sei auch dieses Argument in der heutigen Gesellschaft nur kritisch zu berücksichtigen, da die Identitätsbildung heute nicht abhängig des Geschlechts erfolgt (vgl. Stöger at al 2012, S. 24 ff.)

Schulsituation von Mädchen in MINT

Betrachtet man nun abschließend die aktuelle Schulsituationen von Mädchen in den MINT-Fächern, so ist festzustellen, dass Unterschiede im gesamten Werdegang zu erkennen sind. *„Geschlechtsspezifische Unterschiede ziehen sich durch Schule, Universität und Beruf (Stöger et al. 2012, S. 60).“* Diese Leistungsunterschiede im Bereich der Schule sind auch im Wahlverhalten der Schülerinnen und Schüler zu erkennen. Schließlich entscheiden sich weniger Mädchen für mathematisch/naturwissenschaftliche Fächer bei der Wahl von Wahlpflichtkursen sowie Leistungs- und Grundkursen. Auch ist dies im Übergang in die Studien- oder Berufswelt zu erkennen, da sich weniger Mädchen für ein mathematisches Studium oder eine Ausbildung mit mathematischen Inhalten entscheiden als Jungen. Ein Grund hierfür ist, dass einige Mädchen den MINT-Bereich als Männerdomäne ansehen. Zudem haben Mädchen geringere Selbstwirksamkeitserwartungen als Jungen. Das heißt, dass weibliche Heranwachsende Erfolge als externe Ursachen ansehen (z.B. Glück). Entgegengesetzt dazu werden Misserfolge als stabiles Merkmal beschrieben, was sich auf nicht vorhandene Begabung zurückführen lasse (vgl. Stöger et al. 2012, S. 64). Srock (1989) geht ebenfalls auf die Begründung der Männerdomäne ein. *„So sehen Mädchen signifikant weniger als Jungen den Erwerb von Mathematikkenntnissen als wichtig bei der Erfüllung künftiger Ziele an (Srock 1989, S. 134).“* Demnach wählen junge Frauen eher Berufe, in denen die Mathematik weniger Relevanz hat. Zudem ist festzuhalten, dass die meisten Mädchen angeben mehr Zeit im Unterricht zu benötigen um Lerninhalte zu verstehen. Auch wird ihnen unterstellt, mehr Hilfestellungen zu benötigen als Jungen. Dies spiegelt sich auch darin wieder, dass Jungen eher dazu aufgefordert werden neue Probleme zu lösen, oder Ideen zu neuen Aufgabenstellungen bringen. Wohingegen die Lehrkräfte die Mädchen eher dazu anleite Wiederholungsaufgaben vorzutragen. Folglich wird dies auch durch die Lehrerinnen und Lehrer generiert, weil viele der Lehrpersonen den Mädchen weniger Chancen bieten ihr Können zu zeigen (vgl. Bartsch et al. 2015, S. 129).

Zusammenfassend ist demnach festzuhalten, dass das Interesse von großer Bedeutung für geschlechtsspezifische Unterschiede darstellt. Weitergehend gibt es sowohl angeborene Grundverständnisse, welche sich durch die Sozialisation unterschiedlich ausprägen. Diese unterschiedlichen Sozialisationen von Jungen und Mädchen können demnach Grund für unterschiedliche Leistungen und ein unterschiedliches Verständnis zwischen Mädchen und Jungen im Bereich Mathematik darstellen.

2.3 Aktueller Forschungsstand

Die durchgeführte Forschung schließt an die aktuellen Befunde der Pisa-Studie 2012 und 2015 an. Zudem können Rückschlüsse auf zurückliegende Studien des späten zwanzigsten Jahrhunderts und die Timss-Studie 2015 gezogen werden. Betrachtet man die Studie von Srock (1989) so sind Tendenzen zu geschlechtsspezifischen Unterschieden in der Mathematikleistung bereits hier erkennbar. In dieser Studie wurden Testleistungen in den Bereichen mathematisches Wissen, mathematische Fertigkeiten, mathematisches Verstehen und mathematische Anwendung verglichen. *„So zeigt ein Vergleich von 12 verschiedenen Ländern gesammelte Daten, da[ss] etwa ab der Pubertät durchgehend Jungen bessere Testleistungen in den genannten Bereichen zeigen, […] (Srock 1989, S. 118).“* Unterschiede in den Leistungen sind in den meisten Ländern zu erkennen. Einzig in Israel erzielten die Mädchen in dieser Studie bessere Leistungen als die Jungen. Demnach ist festzuhalten, dass die geschlechtsspezifischen Unterschiede zwar abhängig des Landes schienen, diese sich in den meisten getesteten Ländern allerdings nicht gravierend voneinander unterscheiden. Die größten Unterschiede dieser Studie sind in den Ländern Belgien und Niederlande zu erkennen. Damals wurde in diesen Ländern auch ein geringer sozialer Status der Frau erkannt. Ein Zusammenhang zwischen den Mathematikleistungen und dem sozialen Status der Frau ist demnach zu vermuten (vgl. Srock 1989, S. 124).

Pisa 2012:

Wie bereits eingangs des Kapitels beschrieben, erzielen auch Studien wie Pisa und Timss ähnliche Ergebnisse. Bartsch (2015) fasst in ihrem Buch *Teaching Gender? – zum reflektierten Umgang mit Geschlecht im Schulunterricht und der Lehrerausbildung* die wichtigsten Ergebnisse der Pisa-Studie 2012 zusammen. Sie macht zunächst klar, dass nicht nur die mathematischen Kompetenzen Einfluss auf die Leistungen von jungen Mädchen haben.

> *„Erstens schneiden Mädchen bei mathematischen Kompetenzen schlechter ab als die Jungen und zweitens haben Mädchen deutlich schlechtere Selbstkonzepte und Selbstwirksamkeitserwartungen sowie deutlich mehr Angst (Bartsch 2015, S. 127).“*

Demnach zeigt sich die Grundhaltung der Mädchen gegenüber der Mathematik als wenig aufgeschlossen. Dies scheint wie bereits erwähnt insbesondere daran zu liegen, dass die Mädchen die Mathematik als Männerdomäne ansehen. Auch Stöger (2012) beschreibt ein ähnliches Phänomen. Er geht näher auf die einzelnen Ergebnisse der Studie ein. Es wird deutlich, dass wie bereits Ende des zwanzigsten Jahrhunderts, in den meisten Ländern Unterschiede zugunsten der Jungen zu erkennen sind. Allein in Island erzielen die Mädchen bessere Leistungen als die Jungen. In Finnland, Schweden, Norwegen, Slowenien, Polen und den USA sind zwar Unterschiede erkennbar, diese sind allerdings nicht signifikant. Das heißt es können nur geringe bis keine Unterschiede vermerkt werden. In Österreich, Chile und Luxemburg sind die Jungen sogar deutlich besser als die Mädchen. Auch in Deutschland sind diese Unterschiede zu erkennen. Schließlich erzielt Deutschland ähnliche Ergebnisse wie Österreich. Berücksichtigt man den Durchschnitt der Unterschiede der OECD-Länder, so liegt dieser bei 11 Leistungspunkten. Das heißt konkret, dass die Jungen im Schnitt 11 Punkte mehr erzielen als die Mädchen. In Deutschland ist dieser Unterschied im Jahr 2012 mit 19 Leistungspunkten weitaus größer (vgl. Stöger 2012, S. 17 ff.).

Pisa 2015

Auch 2015 sind Differenzen in den Mathematikleistungen von Jungen und Mädchen erkennbar. Der Fokus der erfassten Mathematikleistungen im Jahr 2015 liegt darin *„Mathematik in einer Vielzahl verschiedener Kontextsituationen zu formulieren, anzuwenden und zu interpretieren (OECD 2016, S. 190).“* Wichtig hierbei seien insbesondere das Mathematische Denken, Verfahren, Konzepte, Fakten und Instrumente zur Beschreibung der Mathematik. Die zentralen Ergebnisse im Ländervergleich machen deutlich, dass der Mittelwert der OECD Länder 490 Punkte beträgt. Dabei erzielt Deutschland im Durchschnitt 506 Kompetenzpunkte. Die überdurchschnittlichen Leistungen Deutschlands sind somit der Kompetenzstufe drei zuzuordnen.

> *„Auf Stufe 3 können Schüler klar beschriebene Verfahren durchführen und, auch solche, die sequentielle Entscheidungen erfordern. Ihre Interpretationen sind solide genug, um als Grundlage für die Aufstellung eines einfachen Modells oder die Auswahl und Anwendung einfacher Problemlösestrategien zu dienen. Schüler auf dieser Stufe können Darstellungen interpretieren und nutzen, die aus verschiedenen Informationsquellen stammen, und hieraus unmittelbare Schlüsse ableiten. Im Allgemeinen sind sie in der Lage, mit Prozentsätzen, Bruch- und Dezimalzahlen umzugehen und proportionalen Beziehungen zu arbeiten. Ihre Lösungen zeigen, dass sie elementare Interpretationen und Überlegungen angestellt haben (OECD 2016, S. 206).“*

Demnach sind sie auch hier im Mittelfeld anzusiedeln. Schließlich bietet Stufe 6 das beste Kompetenzniveau. Die besten Ergebnisse im Jahr 2015 erzielt Singapur mit 564 Punkten. Die schlechtesten Ergebnisse mit 328 Punkten erzielt die Dominikanische Republik. Betrachtet man nun die Ergebnisse von Jungen du Mädchen im Vergleich, so ist feststellbar, dass auch in diesem Jahr der Pisa-Erhebung die Jungen im OECD Schnitt acht Punkte mehr erhalten als die Mädchen. Es ist also einen Annäherung zu erkennen, da im Jahr 2012 der Unterschied bei 11 Punkten lag. Auffallend hier ist auch, dass die 10 % leistungsstärksten Jungen im Schnitt 16 Punkte besser abschneiden, als die 10% der leistungsstärksten Mädchen. Allerdings wurden im Vergleich zum Jahr 2012 keine signifikanten Änderungen in den Leistungsdifferenzen festgestellt. Auch die fokussierte Betrachtung Deutschlands zeigt, dass die Unterschiede größer sind als im Durchschnitt des Ländervergleichs. Schließlich erzielen die Mädchen in Deutschland 15 Kompetenzpunkte weniger als die Jungen (vgl. OECD 2016, S. 191 ff.). Es ist also festzuhalten, dass Leistungsunterschiede konstant zu erkennen sind. Über die letzten Jahre der Pisa-Studie sind keine signifikanten Unterschiede zu erkennen.

Timss 2015

Bereits in der Grundschule sind Unterschiede am Ende der vierten Klasse zu beobachten. Timss testet Mathematikleistungen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Klasse in den mathematischen Bereichen Arithmetik, Geometrie und Umgang mit Daten. Weitergehend stehen Aufgabenformate des Anwendens, Reproduzierens und des Problemlösens zur Verfügung. Einzig in Finnland schließen die Mädchen im Jahr 2015 mit neun Punkten Abstand besser ab als die Jungen. In Deutschland erzielen die Jungen fünf Punkte mehr als die Mädchen. So erhalten die Jungen im Schnitt 524 Punkte, wohingegen die Mädchen nur 520 erhalten. Der Unterschied von fünf Punkten kommt aufgrund von Rundungen zustande. In Deutschland ist es zudem auffällig, dass die Mädchen in allen getesteten Bereichen einen Rückstand vorweisen können. Dabei ist der Unterschied im Bereich Arithmetik am auffälligsten, und kann als signifikant betitelt werden. Vergleicht man dieses Ergebnis mit den anderen getesteten Ländern, so ist dies in 25 von 40 Ländern zu erkennen. Auch bezüglich der Aufgabenformate sind die Unterschiede in allen Formaten erkennbar. Einen signifikanten Unterschied ist allerdings nur im Bereich des Anwendens zu verorten (vgl. Wendt et al 2016, S. 266 ff).

Demnach ist es möglich, die bestehenden Unterschiede in der Sekundarstufe 1 auf die bereits geringen Unterschiede der Grundschule zurückzuführen.

Zusammenhang Funktionen und Geschlecht

Betrachtet man nun abschließend den aktuellen Forschungsstand zur Thematik Geschlecht und Funktionen, so lässt sich hier zunächst der IQB Ländervergleich anführen. Der IQB Ländervergleich untersucht im Allgemeinen naturwissenschaftliche und mathematische Kompetenzen innerhalb Deutschlands und vergleicht die einzelnen Bundesländer untereinander. Diese zu untersuchenden Kompetenzen sind stark an den festgeschrieben Bildungsstandards Deutschlands orientiert. Auch die Thematik der Funktionalen Zusammenhänge kommt hier zu tragen. Schließlich heißt es in den KMK Bildungsstandards:

„Die Schülerinnen und Schüler

- *nutzen Funktionen als Mittel zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge,*
- *erkennen und beschreiben funktionale Zusammenhänge und stellen diese in sprachlicher oder graphischer Form sowie gegebenenfalls als Term dar,*
- *analysieren, interpretieren und vergleichen unterschiedliche Darstellungen funktionaler Zusammenhänge (wie linear, proportinal und antiproportional), […]“ (KMK 2004, S. 11)“*

Demnach werden auch diese Inhalte im IQB-Ländervergleich untersucht. Betrachtet man die Ergebnisse dieser Studie, so ist zunächst festzuhalten, dass im Schnitt 500 Kompetenzpunkte im Bereich Funktionale Zusammenhänge erreicht werden (vgl. Schroeders 2013, S. 125). Jedoch ist in diesem Bereich eine hohe relativ hohe Spannweite von 68 Kompetenzpunkten zwischen den einzelnen Bundesländern feststellbar. Eine spezifischere Betrachtung der geschlechtsspezifischen Kompetenzen zeigt, dass es einen Unterschied von 13 Punkten zugunsten der Jungen gibt. Schließlich erreichen die Jungen im Mittel einen Wert von 506 Kompetenzpunkten wohingegen die Mädchen 493 Punkte erzielen. Demnach sind geschlechtsspezifische Differenzen laut Schroeders im Bereich der Funktionalen Zusammenhänge zu verorten.

Auch Marcel Klinger (2018) geht in seiner Dissertation auf diese Unterschiede ein. Allgemein versucht Klinger in zwei aufeinanderfolgenden Tests herauszufinden, welche Leistungen von Schülerinnen und Schülern zum Thema funktionaler Zusammenhänge erzielt werden. Er macht anhand der Gesamtpunktzahlen der Geschlechter fest, dass es einen Leistungsvorsprung zugunsten der Jungen gibt. Ebenfalls geht er auf die Anzahl der gelösten Items ein. Er beschreibt, dass die Jungen im ersten Test durchschnittlich 1,05 mehr Items lösen können als die Mädchen. Im zweiten Test erhöht sich diese Zahl, sodass die Jungen hier durchschnittlich 1,52 mehr Items lösen. Eng verbunden sei dies jedoch mit der höheren Anzahl an Items im zweiten Test (vgl. Klinger 2018, S. 388 f.).

Insgesamt ist also festzuhalten, dass die Unterschiede der Mathematikleistungen bereits zum Ende des zwanzigsten Jahrhunderts bestehen. Pisa und Timss machen deutlich, dass die Unterschiede abhängig verschiedener Länder sind. Weitergehend scheinen sich die Unterschiede in den letzten Jahren nicht signifikant zu verändern. Zudem sind bereits in der Grundschule Leistungsdifferenzen zu erkennen, welche sich im weiteren Verlauf der Schule nicht aufheben. Außerdem scheinen auch Differenzen im Spezialfall von Funktionen zu verorten.

3. Empirische Umsetzung

3.1 Forschungsfrage und Hypothesenbildung

Auf Basis der zuvor vorgestellten Literatur lässt sich nun folgende Fragestellung formulieren:

„Welche Gründe gibt es für die Leistungsdifferenzen von Mädchen und Jungen zum Thema lineare Funktionen?“

Schließlich wurde im theoretischen Hintergrund klar, dass sich die mathematischen Leistungen von Mädchen und Jungen klar unterscheiden. Diese Problematik besteht schon seit einem längeren Zeitraum, sowie es Pisa und Timms widerspiegeln. Weitergehend geht Klinger (2018) darauf ein, dass diese Unterschiede auch im Bereich von Funktionen vorzufinden sind. Durch die Beantwortung dieser Fragestellung wäre es schließlich möglich, Mädchen im Mathematikunterricht besser zu fördern beziehungsweise Jungen zu fordern. Schließlich bildet das Themenfeld der Funktionen einen wichtigen Aspekt des Mathematikunterrichts. Erkennbar ist dies daran, dass sich diese Leitidee durch den gesamten Bildungsweg des Mathematikunterrichts zieht.

Um die Fragestellung beantworten zu können, gilt diese in Teilbereiche zu unterteilen. Hierzu dienen die nachfolgenden Hypothesen:

1. *Mädchen fällt es schwerer als Jungen zwischen den verschiedenen Darstellungsformen von linearen Funktionen zu wechseln.*
2. *Jungen sind eher dazu in der Lage außermathematische Situationen zu einem innermathematischen Sachverhalt zu rekonstruieren.*
3. *Mädchen benötigen mehr Hilfestellungen als Jungen.*
4. *Mädchen übertragen typische Schemata aus dem Mathematikunterricht auf andere Aufgaben.*

Die erste Hypothese stützt sich darauf, dass erst von einem tragfähigen Verständnis gesprochen werden kann, wenn eine Person dazu in der Lage ist flexibel zwischen den verschiedenen Darstellungsformen zu wechseln. Demnach würde ein Wechsel zwischen den Darstellungsformen ein besseres Verständnis ausmachen. Da Jungen in bisher erhobenen Studien meistens bessere Leistungen erzielen, wird vermutet, dass ihnen ein solcher Wechsel auch bei linearen Funktionen besser gelingt. Eng damit verknüpft ist auch die zweite Hypothese. In der Mathematikdidaktik wird häufig erwähnt, dass man erst von einem Verständnis sprechen kann, wenn die Schülerinnen und Schüler dazu in der Lage sind eine außermathematische Situation mit einer Innermathematischen zu verknüpfen. Eng verbunden ist dies mies den Darstellungswechseln. Schließlich gilt es hier auch, die sprachlich situative Ebene mit der graphischen oder algebraischen Repräsentationsform zu verknüpfen. Die zweite Hypothese ist demnach dazu da, die erste zu unterstützen. Die dritte Aussage stützt sich auf die Aussage, aus Kapitel 2.2, dass Mädchen eher dazu angeleitet werden Wiederholungsaufgaben zu präsentieren. Demnach benötigen sie auch mehr Hilfestellungen als die Jungen. Dies kann anhand der ausgegebenen Hilfskarten gemessen werden. Außerdem geben mündliche Hilfestellungen einen Aufschluss darüber. Die letzte Hypothese, welche sich mit der Arbeitsweise von Mädchen bezieht, ist ebenfalls auf diese Aussage zu beziehen. Darunter ist schließlich zu verstehen, dass neue Strukturen von Mädchen nur schwerer erfasst werden können. Deutlicher wird dies in der Auswertung der Daten.

3.2 Klinische Interviews

Das Klinische Interview stellt eine Spezialform von gängigen Interviews dar und ist den qualitativen Forschungsmethoden unterzuordnen. Die *„[q]ualitative Forschung arbeitet mit verbalen oder visuellen Daten, deren Bedeutung interpretativ erschlossen werden muss (Hussy 2013, S. 192).“* Demnach sind qualitativ erworbene Daten stets interpretationsbedürftig. Weitergehend ist festzuhalten, dass die qualitative Forschung stets abhängig der teilnehmenden Individuen ist, da der persönliche Hintergrund, hier etwa der Lernstand oder die Lernvoraussetzungen der Probanden, mit in die Auswertung der Daten einfließen. Bei dieser Art der Forschungsmethode ist das Ziel nicht die bloße Verallgemeinerung auf eine Grundgesamtheit, sondern der Rückschluss auf theoretische Hintergründe. Demnach kann zwar versucht werden ein allgemeines Fazit zu ziehen, jedoch stellen diese nur Vermutungen auf Basis theoretischer Grundlagen dar. Zudem ist festzuhalten, dass das Interview *„die am häufigsten eingesetzte Datenerhebungsmethode in der qualitativen Forschung (Hussy 2013, S. 224)“* darstellt und wird im Normalfall durch ein persönlich-mündliches Gespräch realisiert. Dabei werden die aufgenommenen Daten, in Form von Videomaterialien oder Tonmitschnitten, in der Regel durch Transkripte aufbereitet, um eine Analyse dessen zu ermöglichen. Unterschieden wird hier zwischen wörtlichen und kommentierten Transkripten.

> *„Die sogenannte wörtliche Transkription bietet sich an, wenn in erster Linie die inhaltlich-thematische Ebene im Mittelpunkt der Analyse steht und die sprachliche Ausdruckskraft der Befragten eher nebensächlich ist (Reinders 2011, S. 111).“*

Entgegengesetzt dazu spielt die Ausdrucksweise in der kommentierten Transkription eine wichtige Rolle. Neben diesem Aspekt werden auch Mimik, Gestik und Pausen in der kommentierten Transkription vermerkt. Dies ist insbesondere dann der Fall wenn auch diese Komponenten eine Auswirkung auf die Analyse haben (vgl. Reinders 2011, S. 111).

Anders als bei klassischen Interviews, die in der Regel zur reinen Informationsbeschaffung dienen, zielen klinische Interviews auf die Offenbarung von Gedankengängen durch ein behutsames Nachfragen ab. Auch kann man sagen, dass klinische Interviews einem halbstandardisierten Verfahren entsprechen. Schließlich ist es dem Interviewer nicht möglich sich gezielt auf die Antworten und Gedankengänge der Testpersonen einzustellen, und muss somit in der Lage sein flexibel zu reagieren. Als Erhebungsinstrument bei klinischen Interviews wird häufig das Laute Denken verwendet. Dieses ist dadurch gekennzeichnet, dass die Testpersonen alle ihre Gedankengänge verbalisieren, um einen Einblick in die Gedankengänge zu ermöglichen. Doch es gibt auch einige Schwierigkeiten, die bei der Durchführung der Datenerhebung beachtet werden müssen. Selter (1997) spricht von der *„Schwierigkeit das Unbewusste bewusst zu machen (S.102).“* Damit ist gemeint, dass geeignete Fragen genutzt werden müssen um Gedankengänge transparent erscheinen zu lassen. Fragen wie *„Kannst du sagen, wie du das herausgefunden hast?“* bieten eine Gelegenheit der Erklärung seitens des Befragten um Denkweisen durchleuchten und verstehen zu können. Zudem führt er in diesem Zusammenhang an, dass stets für eine angenehme Gesprächsatmosphäre zu sorgen ist. Schließlich muss dem Befragten klar gemacht werden, dass Fehler keine Erniedrigung darstellen, sondern Anlass zum Verstehen von Denkfehlern ermöglichen. Als zweite Schwierigkeit nennt Selter den *„Umgang mit Schweigen (S.103)“.* Ein Unterbrechen von Pausen ist nicht immer angebracht. Schließlich kann ein Schweigen verschiedene Bedeutungen haben. So ist es etwa möglich, dass ein Schüler oder eine Schülerin im Denkprozess steckt. Weitergehend kann ein Schweigen Unsicherheit oder die Nichtbeschäftigung einer Testperson wiederspiegeln. Demnach ist es stets wichtig Geduld zu bewahren um mögliche Gedankengänge nicht zu unterbrechen. Dieser Aspekt schließt direkt an die nächste Schwierigkeit nach Selter an, welche mit *„Bezähmung der eigenen Mitteilsamkeit (S. 104*)“ betitelt ist. Darunter ist zu verstehen, dass es Aufgabe des Interviewers ist einen angemessenen eigenen Redeanteil zu finden. Schließlich führt ein hoher Redeanteil dazu, dass die Antworten der Schülerinnen und Schüler suggeriert werden. Dem entgegen zu setzen ist ein zu geringerer Redeanteil. Dies kann dazu führen, dass die Gedankengänge der Lernenden so im Dunkeln bleiben. Hier kann man ebenfalls das Erteilen von Rückmeldungen anführen. Bei klinischen Interviews sollte möglichst auf negative Rückmeldungen verzichtet werden. Ziel dessen ist es Denkwege und falsche Ansätze nachvollziehen zu können. Negative Rückmeldungen könnten eine negative Grundhaltung seitens der Probanden entwickeln, wodurch eine Abwehrhaltung entstehen kann. Ein Einblick in die Gedankengänge würde dadurch bloß erschwert werden. Anderenfalls sollten allerdings gezielte positive Rückmeldungen erteilt werden, was dazu dient Verunsicherungen seitens der Schülerinnen und Schüler zu lösen. Ebenfalls eng verknüpft mit der Schwierigkeit des Redeanteils ist der Aspekt, dass es dem Interviewer nicht möglich ist nicht zu beeinflussen. Schließlich löst jeder Kommentar seitens des Interviewers eine Reaktion bei den Testpersonen aus. Auch aus diesem Grund ist der Redeanteil geeignet zu wählen. Als letzte Schwierigkeit nennt Selter die *„Voraussetzungsgebundenheit und Vorläufigkeit von Interpretationen (S. 105).“* Konkret bedeutet dies, dass man den Lernenden nicht in den Kopf gucken kann. Das heißt, dass sauschließlich das Aufstellen von Vermutungen möglich gemacht wird. Ein klares Festsetzen von Fakten ist hier nicht anstellbar.

Zusammenfassend ist demnach festzuhalten, dass klinische Interviews den qualitativen unterzuordnen sind. Weitergehend bergen klinische Interviews einige Probleme, auf die während der Materialentwicklung und dem Erstellen eines Interviewleitfadens geachtet werden muss. Schließlich sollen bei klinischen Interviews die Lernenden nicht bloß möglichst schnell auf richtige Lösungswege lenken, sondern haben sie die klare Intention die Denkweise von Schülerinnen und Schülern sichtbar zu machen.

3.3 Materialentwicklung und Interviewleitfaden

Um einen gezielten Einblick in das funktionale Denken der Schülerinnen und Schüler zu erhalten wurde an die Studie Marcel Klingers angesetzt. Dieser hat in seiner Forschung bereits herausgefunden, dass Mädchen größere Schwierigkeiten beim Funktionalen Denken besitzen als Jungen. Aus diesem Grund wurde die erste Testaufgabe aus Klingers Test übernommen (siehe *Abbildung 1: Testaufgabe 1*). In Testaufgabe 1 ist zu erkennen, dass eine Funktion f in einem Koordinatensystem gegeben ist. Weitergehend ist erkennbar, dass die Aschenbeschriftungen x und y an den Achsen fehlen. Lediglich der Nullpunkt ist markiert. Außerdem ist ein Raster zu erkennen, welches der Orientierung dienen soll. Zudem wird auf dem Aufgabenblatt die Funktionsgleichung f(x)=2x gegeben sein. Als Aufgabe erhalten die Lernenden, dass sie die Abbildung zunächst beschreiben sollen. Eine solche Aufgabe ist im Zusammenhang eher als einfach zu verstehen. Schließlich sind die Schülerinnen und Schüler bereits mit linearen Funktionen im Kontakt getreten, sodass jeder Lernende eine Antwort geben kann. Weitergehend bietet die Aufgabe einen ersten Einblick in das Verständnis der Heranwachsenden. Wünschenswert wäre es hier, wenn die Schülerinnen und Schüler zunächst erläutern eine Lineare Funktion zu erkennen. Die Eigenschaften einer steigenden Funktion, welche durch den Koordinatenursprung verläuft sollten ebenfalls genannt werden. Durch diesen Aspekt wird insbesondere die Objektvorstellung zu Funktionen erfragt, indem die graphische Darstellungsebene von Funktionen berücksichtigt wird. Zudem sollten die Schülerinnen und Schüler bemerken, dass eine Achsenbeschriftung fehlt, wie es zuvor bereits beschrieben wurde. Damit einhergehend sollte ebenfalls klar werden, dass nicht bloß die Achsenbeschriftung durch x und y fehlt, wie es bereits beschrieben wurde, sondern auch die Einteilung der Werte auf diesen Achsen. Sollten nicht alle diese Aspekte erkannt werden, wird durch Hinweise versucht die fehlenden Aspekte zu erkennen. Dabei sollen jedoch keine konkret inhaltlichen Hilfestellungen gegeben werden. Vielmehr soll versucht werden die Schülerinnen und Schüler an ähnliche Aufgaben zu erinnern. Eine Möglichkeit hierfür wären folgende Fragestellungen: Hast du eine ähnliche Aufgabe schon mal gesehen? Wie gehst du selber vor, wenn du eine Funktion zeichnen möchtest? Wobei achtest du wenn du eine Funktion zeichnest? Nachdem das Abgebildete schließlich beschrieben ist, und die Lernenden möglichst von alleine entdeckt haben, dass eine Beschriftung der Achsen fehlt, können diese der Aufforderung nachgehen einen Zusammenhang zur abgebildeten Funktions-

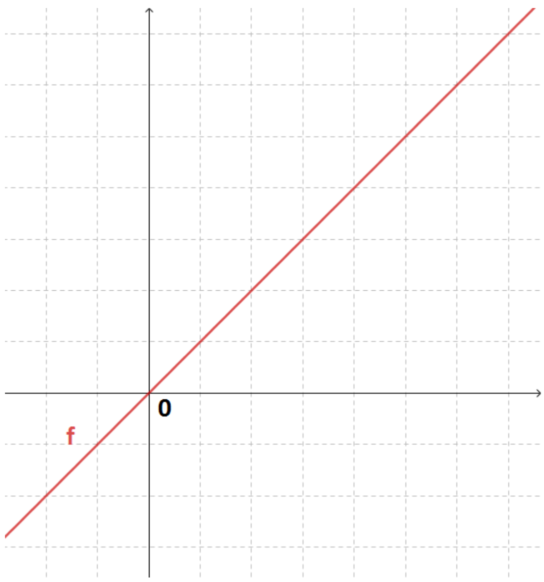

Abbildung 1: Testaufgabe 1

gleichung herzustellen. Ziel ist es schließlich, dass die Lernenden die Achsen des Koordinatensystems so beschriften, dass der Funktionsgraph zur Funktionsgleichung passt. Sollten die Lernenden mit diesem Aufgabenteil Probleme haben, so ist es auch hier wieder wichtig, Hilfestellungen zu geben, die auf bekannte Aufgaben zurückzuführen sind. Auch hier bietet die Frage „Wie gehst du gewöhnlich vor, wenn du eine Funktion zeichnest?“ hilfreich sein. Schließlich können die Lernenden so dazu angeleitet werden eine Wertetabelle zu erstellen um eine geeignete Achsenbeschriftung zu erhalten. Durch ein solches Vorgehen wird insbesondere versucht herauszufinden, ob die Kovariationsvorstellung vorhanden ist. Schließlich werden die Veränderungen von x und y im kombinierten Sinne miteinander betrachtet. Dies kann vollzogen werden durch die algebraische und die numerisch-tabellarische Repräsentationsform. Schließlich müssen die Lernenden hierzu die algebraische Funktionsgleichung und die numerisch-tabellarische Wertetabelle nutzen. Abschließend werden die Lernenden dazu angeleitet eine Situation zu finden die den abgebildeten Funktionsgraphen beschreibt. Dadurch wird die situativ-sprachliche Repräsentationsebene eingeschlossen. Die Schwierigkeit hier besteht darin, dass die Funktion nicht im Ursprung beginnt. Das heißt auch der dritte Quadrant des Koordinatensystems muss berücksichtigt werden, da die Funktion ein full domain Graph ist. Möglich hierbei wäre es schließlich, dass die Lernenden einen Temperaturanstieg beschreiben, da Temperaturen auch unter 0 Grad gemessen werden können. Weitergehend muss der Nullpunkt als Festgesetzten Zeitpunkt definiert werden. Ebenfalls gibt es die Möglichkeit, dass die Schülerinnen und Schüler den dritten Quadranten unberücksichtigt lassen. Ein solches Vorgehen wäre ebenfalls möglich. Schließlich könnten Kosten hierdurch beschrieben werden. Jedoch muss in diesem Zusammenhang klar darauf eingegangen werden, dass in einem solchen Zusammenhang die negativen Werte missachtet werden um von einem tragfähigen Verständnis sprechen zu können. Sollten die Lernenden keine außermathematische Sachsituation zu diesem Graphen abrufen können erhalten diese Hilfskarten. Zunächst erhalten sie zwei Karten auf denen Beispiele für die mögliche Beschriftung der x- und y-Achse beschrieben sind. Sollte auch hier keine Antwort gefunden werden können gibt es eine Hilfskarte mit einer Beispielaufgabe:

„Stell dir vor du befindest dich im Erdgeschoss eines Wohnhauses. Um deinen Freund zu besuchen musst du in die dritte Etage laufen. Pro Minute läufst du zwei Etagen. Wann bist du bei deinem Freund angekommen?“

Diese Aufgabe bietet zwar in erster Linie einen Einblick in den ersten Quadranten, jedoch ist es anschließend möglich auch eine Vorstellung zum negativen Wertebereich zu erfragen. Außerdem werden die Lernenden dazu angeleitet die Aufgabe zu lösen, was ebenfalls Aufschluss über das Verständnis zur sprachlich-situativen Darstellungsebene bietet.

Ist diese Aufgabe abgeschlossen, folgt Testaufgabe 2. In Testaufgabe 2 geht es anschließend darum, das Wissen aus Testaufgabe 1 zu übertragen. Abbildung 2 zeigt wie diese genau aussieht. Wie in der Abbildung zu sehen ist, sind auch hier die Achsen nicht beschriftet. Es handelt sich dabei um die Funktion g(x)= -x+3. Wie auch in der ersten Testaufgabe sollen die Schülerinnen und Schüler auch hier beschreiben was sie sehen. Dadurch, dass die erste Aufgabe bereits gelöst wurde sollte dies weniger Probleme bergen.

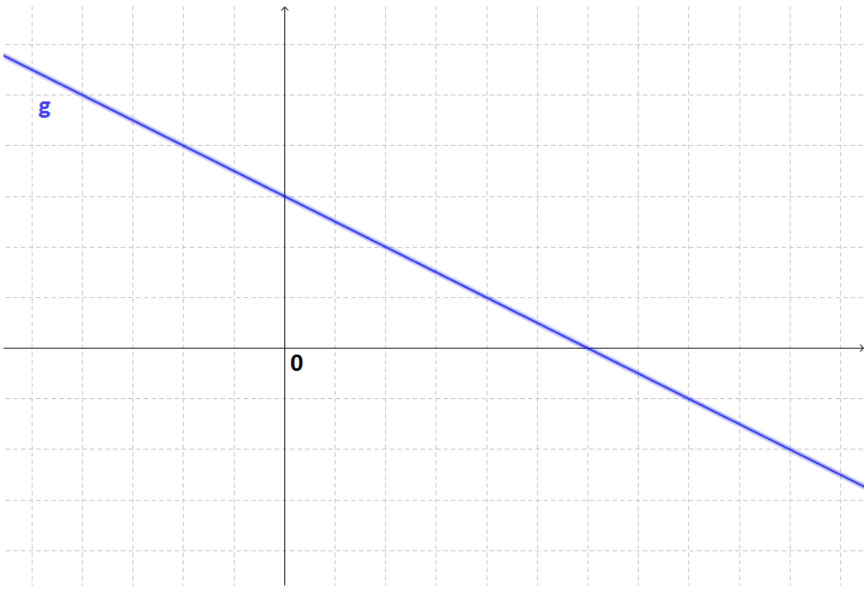

Abbildung 2: Testaufgabe 2

Der konkrete Unterschied zu Aufgabe eins liegt darin, dass die Funktion sinkt und auf der y-Achse um einen Wert von 3 verschoben ist. Diese Funktionseigenschaften sollten von den Lernenden erkannt werden. Die folgende Aufgabe ist es nun, wie auch zuvor, eine geeignete Achsenbeschriftung und Einteilung zu wählen. Da dies zuvor bereits durchgeführt wurde, sollte die Vorgehensweise auf diese Aufgabe übertragen werden können. Auch soll eine geeignete Sachsituation gefunden werden. Sollten hier erneut Probleme auftreten erhalten die Schülerinnen und Schüler auch hier eine Hilfskarte:

„Ein Stein wird aus drei Metern Höhe fallen gelassen. Pro Sekunde fällt er einen Meter. Gib an wann der Stein den Boden berührt. Auf welcher Höhe befindet sich der Stein nach einer Sekunde?“

Auch hier steht der erste Quadrant im Fokus. Es können allerdings auch Fragen zum zweiten und dritten Quadranten gestellt werden. Zudem soll auch hier die Aufgabe gelöst werden.

Abschließend ist festzuhalten, dass von den Schülerinnen und Schülern neben dem Aufgabenzettel ein weiteres Blatt für Rechnungen und Notizen zur Hilfe gestellt wird. Als weitere Hilfsmittel dürfen sowohl ein Geodreieck, als auch der Taschenrechner verwendet werden. Schließlich ist es den Schülerinnen und Schülern auch in der Schule möglich mit dem Taschenrechner zu arbeiten. Außerdem steht die Rechenleistung der Heranwachsenden nicht im Fokus des Interessensgewinns, sodass der Taschenrechner verwendet werden darf.

3.4 Vorstellung der Probanden

Die Interviews wurden mit zwei Mädchen und zwei Jungen durchgeführt. Einer der Jungen besuchte zum Zeitpunkt der Datenerhebung den neunten Jahrgang einer Gesamtschule der Stadt Ratingen. Er besuchte einen E-Kurs der Schule, und seine Mathematikleistungen sind laut Aussagen des Schülers und der Eltern als gut zu betiteln. Der Junge der Gesamtschule wird im Folgenden als Sören beschrieben. Die anderen Lernenden besuchen die achte Klasse eines Gymnasiums derselben Stadt. Sie gehen alle in eine Klasse und erfahren demnach den gleichen Unterricht. Laut Angaben des Schülers Julian, sind auch seine Mathematikleistungen als gut bis sehr gut einzuschätzen. Die der Mädchen verlaufen sich auf gute bis durchschnittliche Leistungen.

Die Auswahl der Schülerinnen und Schüler erfolgt mit dem Ziel möglichst gleiche Ausgangssituationen zu schaffen. Zwar besucht einer der Jungen den Jahrgang neun einer Gesamtschule, doch soll dies dadurch ausgeglichen werden, dass die Lernenden des Gymnasiums einen Jahrgang tiefer besuchen. Durch diesen Unterschied wäre es jedoch auch möglich ein Vergleich zwischen den Schulformen zu ziehen. Weitergehend wurde versucht darauf zu achten, relativ gleich gemessene Mathematikleistungen als Ausgangslage zu schaffen, um einen Vergleich zu ermöglichen. Stark variierende Mathematikleistungen würden einen solchen Vergleich erschweren.

4. Datenauswertung

4.1 Analyse der Interviews im Hinblick auf die vorgestellte Literatur

Es werden in diesem Kapitel zunächst die Analysen der einzelnen Interviews vorgestellt, anschließend ein kurzes Fazit dazu gezogen und im Weiteren begründet, warum die ausgewählten Szenen der Interviews prägnant sind. Abschließend werden die Ergebnisse im Hinblick auf die Forschungsfrage diskutiert, sowie ihre Aussagekraft resümiert. Um einen besseren Überblick in die einzelnen Interviews geben zu können, werden die Ausschnitte der Interviewtranskripte in den Fließtext eingefügt. Weitergehend werden relevante Mitschriften der Schülerinnen und Schüler zu sehen sein, sofern es für die Analyse notwendig ist. Auch wird zwischen den Interviewpassagen immer erwähnt, was folglich geschehen ist, um einen besseren Gesamtüberblick liefern zu können.

4.1.1 Analyse Interview 1

Das erste Interview wurde mit Sören durchgeführt. Wie in Kapitel 3.4 beschrieben, besuchte Sören zum Zeitpunkt des Interviews die neunte Jahrgangsstufe einer Gesamtschule.

Zunächst erhält Sören die Aufgabe das Koordinatensystem zu beschreiben. Hier gibt es keine nennenswerte Auffälligkeiten. Er geht darauf ein, dass das Koordinatensystem aus einer x- und einer y-Achse besteht. Weitergehend beschreibt er den Verlauf des Funktionsgraphen und geht auch auf die Funktionsgleichung f(x)=2x ein. Ebenfalls beschreibt Sören, dass die Vorgehensweise in der Schule eine andere ist. Schließlich erhalten sie dort die Funktionsgleichung und sollen den zugehörigen Graphen zeichnen. Dies macht klar, dass das Aufgabenformat für ihn neu zu sein scheint.

Anschließend soll Sören das Koordinatensystem so beschriften, dass die Gleichung und der Graph zueinander passen. *Tabelle 1: Transkript 1 - Sören* zeigt, wie Sören dabei vorgeht:

Tabelle 1: Transkript 1 - Sören

Time-Code	Absatz	Person	Inhalt
2:47	1	I	So, und deine folgende Aufgabe, die ich gerne jetzt von dir gelöst bekommen wollen würde, ist dass du dieses Koordinatensystem, diese Achsen *[I zeigt auf das Koordinatensystem]*, so beschriftet, dass das dazu passt *[I zeigt auf die Gleichung]*.
	2	S	*[S greift zum Taschenrechner]*
	3	I	Das ist ja `ne Gleichung, ne? Vielleicht schreibst du dir sonst auch am besten auch was auf. Wenn du das nicht machen musst. Dann sag auch am besten, was du eintippst.
	4	S	Ja also, hier *[S zeigt auf eine Taste auf dem Taschenrechner]* kann man so den Modus ändern. Und dann geh ich halt auf drei für Table, und dann kommt halt auch f(x). Da geb ich jetzt einfach 2x ein *[S tippt während Erklärung Werte ein]*. Dann den Startwert, das ist anscheinend (-3). *[S schaut auf den Funktionsgraphen]* - Und dann Endwert 10 - 10. [unverständlich; vermutlich: „converter eins“] *[S tippt auf dem Taschenrechner erneut Gleichung ein]* - Moment.- Achso deswegen funktioniert. *[S tippt erneut auf dem Taschenrechner Werte ein]* - Ja ich hatte bei der Schrittweite, bei der Schrittweite hatte ich 54 stehen.
4:00	5	I	Ha, okay.
	6	S	[unverständlich; vermutlich: „gut“] - - Was soll ich jetzt machen?
4:07	7	I	Genau und äh, was zeigt der dir da jetzt genau an?
	8	S	Ja die einzelnen Punkte, wo die äh durchgeht *[zeigt auf den Funktionsgraphen]*.

In diesem Abschnitt wird die Herangehensweise von Sören deutlich. Als er die Aufgabe erhält eine Achsenbeschriftung anzufertigen, greift Sören sofort zum Taschenrechner (vgl. Absatz 2). Er beschreibt genau, wie er mit dem Taschenrechner vorgehen muss, um eine geeignete Achsenbeschriftung vornehmen zu können (vgl. Absatz 4). Demnach scheint er auf Basis des Taschenrechners eine Wertetabelle zu erstellen, welche mit der numerisch-tabellarischen Darstellungsebene in Verbindung steht. Ebenfalls scheint er dazu in der Lage zu sein, diese Darstellungsebene mit der graphischen Darstellungsebene zu verknüpfen. Dies erkennt man daran, dass er in Absatz 8 angibt, welche Punkte die Wertetabelle des Taschenrechners beschreibt. Folglich wird eine erste Verknüpfung zwischen zwei Darstellungsebenen bei Sören hergestellt. Nach dieser Interviewpassage beschriftet Sören die Achsen richtig, indem er die Werte des Taschenrechners abschreibt. Dabei vergisst er allerdings die Achsen mit x und y zu betiteln. Dies kann allerdings als Flüchtigkeitsfehler angesehen werden, da er diese in seiner anfänglichen Beschreibung erwähnt hat.

Um einen tieferen Einblick darüber zu erhalten, ob Sören auch versteht, wie der Taschenrechner vorgeht, wird er anschließend dazu befragt.

Tabelle 2: Transkript 2 - Sören

Time-Code	Abschnitt	Person	Inhalt
4:53	9	I	Ähm, weißt du denn auch, was der Taschenrechner denn da genau rechnet, wenn du das da einfach so eingibst?
	10	S	*[S schüttelt den Kopf]*
	11	I	Könntest du das auch ohne de Taschenrechner machen?
	12	S	hmm, ne.

Hier wird klar, dass Sören zwar eine Idee besitzt eine solche Aufgabe zu lösen, obwohl das Vorgehen in der Schule unterschiedlich zu sein scheint, er jedoch kein tragfähiges Verständnis zu Funktionsgleichungen hat. Schließlich wird in Absatz 10 durch das Schütteln des Kopfes klar, dass er nicht weiß, wie der Taschenrechner arbeitet. Auch scheint ihm nicht klar zu sein, wie er die Aufgabe ohne den Taschenrechner lösen kann. Dies zeigt, dass Sören mit der formal symbolischen Darstellungsebene Probleme zu haben scheint. Schließlich kann er weder selbst die Gleichung auflösen, noch eine eigene Wertetabelle anfertigen. Die Verknüpfung zwischen diesen beiden Darstellungsebenen scheint Sören demnach schwer zu fallen.

Anschließend soll Sören sich eine Sachsituation zum gegebenen Funktionsgraphen, beziehungsweise auch zur gegebenen Funktionsgleichung, vorstellen. Dies gelingt ihm allerdings nur, unter der zur Hilfegabe der Hilfskarten für die x- und y-Achse. Unter dieser Voraussetzung findet er einen außermathematischen Kontext mit einem Fahrstuhl. Einen Bezug zur situativ-sprachlichen Repräsentationsebene findet er demnach nur durch eine Hilfestellung.

Tabelle 3: Transkript 3 - Sören

Time-Code	Absatz	Person	Inhalt
5:44	13	I	Ich versuch dir mal `nen Tipp zu geben. Stell dir doch mal vor, dass die y-Achse die Höhe *[I gibt Hilfskarte]*zum Beispiel von nem Stock - Stockwerken von einem Gebäude oder sonst was darstellt.
	14	S	Mhm.
	15	I	Und die x-Achse die Zeit *[I gibt Hilfskarte]* zum Beispiel in Minuten. –

			Kannst du dir vielleicht jetzt was darunter vorstellen?
6:00	16	S	Ja, wie lange der Fahrstuhl braucht?
	17	I	Zum Beispiel `nen Fahrstuhl, oder man selber, genau.
	18	S	Mhm.
	19	I	Könntest du das jetzt vielleicht formulieren? Irgendwie jetzt `ne Textaufgabe?
6:09	20	S	Äh, wie lange braucht der Fahrstuhl aus dem – Tiefgarage bis in den vierzehnten Stock?
	21	I	Genau, das wäre doch schon mal `ne Möglichkeit.

In Absatz 20 wird klar, dass er unter der Hilfestellung einen Sachverhalt finden kann. Ihm ist bewusst, dass er den dritten Quadranten mit berücksichtigen muss. Dies wird durch die Angabe der Tiefgarage deutlich. Auf der y-Achse scheint dies auch Sinn zu machen. Dass die x-Achse hier jedoch auch negativ beschrieben ist, scheint ihm Probleme zu bereiten. Schließlich würde laut seiner Beschreibung der Graph nur den ersten und vierten Quadranten treffen. Jedoch ist es interessant, dass er den dritten Quadranten überhaupt versucht zu berücksichtigen. Weitergehend geht er in seiner Antwort in Absatz 20 nicht auf die Steigung des Graphen ein. Er gibt nicht an, wie lange der Fahrstuhl pro Etage benötigt. Dies kann jedoch damit zusammenhängen, dass ihm nicht klar war, eine explizite Aufgabe formulieren zu müssen. Es lässt sich aus diesem Abschnitt jedoch ableiten, dass Verbindungen zwischen der graphischen und situativ sprachlichen Darstellungsebene geknüpft werden, diese jedoch nicht korrekt zueinander passen. Auch bleibt hier erneut die algebraische Darstellungsebene unberücksichtigt. Anschließend erhält Sören die erste Textaufgabe. Dies löst er mit Hilfe des Taschenrechners richtig, ist jedoch auch hier wieder nicht in der Lage eine Lösung ohne diesen zu erhalten.

Zum Abschluss der ersten Testaufgabe wird Sören erneut dazu aufgefordert die Aufgabe ohne den Taschenrechner zu lösen, und sein allgemeines Wissen zu Funktionsgleichungen mitzuteilen.

Tabelle 4: Transkript 4 - Sören

Time-Code	**Absatz**	**Person**	**Inhalt**
7:50	22	I	Okay ähm, ich behaupte, dass du das mit Sicherheit auch noch anders machen kannst. Das ist das, was ich vorhin `n bisschen zu dir meinte. Wenn du das hier *[I zeigt auf den Funktionsgraphen]* alles gar nicht hast.
	23	S	Mhm.
	24	I	Und nur das *[I zeigt auf die Funktionsgleichung]*, könntest du das dann auch lösen? Wenn du nur die Funktionsgleichung gegeben hättest.
8:12	25	S	--*[Pause 5 Sekunden]* Ja weil x ist 1`. Also x ist grundsätzlich 1 erstmal, solange da nur ein x steht? Und …
	26	I	… Kannst du mir einmal beschreiben was…
	27	S	… Also ich denk mir jetzt, dass die 2 ist halt das hier *[S zeigt auf die y-Achse]* und dann mal x und x ist 1 also wäre 2 mal x das hier *[S zeigt auf den Funktionsgraphen an der Stelle y=2]*.
	28	I	Genau in dem Fall, ja. Ähm wie sind denn solche linearen Funktionen generell aufgebaut, kannst du mir das sagen ganz allgemein?

8:47	29	S	Ja da steht halt `ne Zahl und x.
	30	I	Okay.
	31	S	Oder Zahlen.
	32	I	Okay.
	33	S	Ja.
9:00	34	I	Ähm sagt dir y=mx+b oder ax+b oder sonst was etwas?
	35	S	hmm.
	36	I	Okay vielleicht kommt das sonst in der nächsten Aufgabe auch nochmal raus, vielleicht kannst du dich dann daran erinnern. Ähm noch eine Sache die ich dir gerne sagen würde, guck dir dein Koordinatensystem nochmal genau an, fällt dir irgendwas auf?
	37	S	mh *[als nein formuliert]*

In Absatz 25 und 27 wird klar, dass Sören von allgemeinen Regeln zu reden scheint. Jedoch versucht er einen Zusammenhang zwischen der Funktionsgleichung und dem Graphen herzustellen. Er scheint eine plausible Erklärung zu finden. Anschließend wird allerdings deutlich, dass er den allgemeinen Aufbau einer Funktionsgleichung nicht verinnerlicht zu haben scheint, da er diesen nicht mit y=mx+b betiteln kann. Zudem orientiert er sich ausschließlich an der gegebenen Gleichung. Die Steigung und den y-Achsenabschnitt kann er nicht zuordnen, sodass erneut klar wird, dass das Verständnis zur formal symbolischen Darstellungsebene fehlt. Auch fällt Sören nicht auf, dass er vergessen hat die x- und y-Achse zu betiteln. Dies scheint jedoch, wie bereits oben erwähnt, als Flüchtigkeitsfehler zu werten sein.

Sören erhält nun die zweite Testaufgabe. Er beschreibt einige Eigenschaften der Funktion richtig, sodass zu vermuten ist, dass er die Objektvorstellung verinnerlicht zu haben scheint. Dies stützt sich allerdings nur auf die graphische Darstellungsebene. Deutlich wird hier erneut, dass er die algebraische Darstellungsebene, in Form der Funktionsgleichung, nicht verinnerlicht hat, da er die negative Steigung und den y-Achsenabschnitt nicht erkennen kann.

Als Sören die Achsen beschriften soll greift er erneut zum Taschenrechner. Hier stößt er jedoch auf einen Konflikt, da sich die Lösungen des Taschenrechners nicht mit seinen Gedankengängen decken.

Tabelle 5: Transkript 5 - Sören

Time-Code	Absatz	Person	Inhalt
12:56	38	I	Hast du eine Ahnung wie du das verändern könntest?
	39	S	Ja indem ich hier das *[S zeigt auf den Taschenrechner]* anders eingebe.
	40	I	Okay, dann mach das doch mal.
	41	S	*[Gibt Daten in den Taschenrechner ein] [15 Sekunden]*. *[S Beginnt Werte an der y-Achse des Koordinatensystems abzuzählen]*
13:26	42	S	Äh ja jetzt kommt das – Jetzt kommt das ungefähr hin.
	43	I	Okay was würdest du denn sagen, wie das – hinkommt?
	44	S	*[S nießt]* Also die Schrittweite hier ist in einer Schritten *[S zeigt auf die x-Achse]* und hier in so 0,5 *[S zeigt auf die y-Achse]*. Weil das hier ist genau 1, 2, 3, 4, 5, *6 [S geht die Schritte der y-Achse durch]*. Und hier

			halt 1, 2, 3 …
	45	I	… Zeichne da ruhig mal rein. Also du darfst da ruhig rein zeichnen und da was rein schreiben.
14:09	46	S	Ja also, das ist halt hier -5 *[S schreibt -5 in die Abbildung auf die x-Achse]* und hier ist das halt, als wenn man das an den Kästchen abzählen würde 6 $\frac{1}{2}$ *[S schreibt* $6\frac{1}{2}$ *an die y-Achse]*, und, aber laut der Tabelle die der, die halt bei der Gleichung raus kommt wäre das, müsste das 8 sein.
	47	I	Okay, also da siehst du \`nen Unterschied.
	48	S	Joa.
	49	I	Also ähm, wie er – kannst du dir irgendwie erklären, warum das so ist?
	50	S	Jiii ähm, nein.
	51	I	Okay, ähm – missachte doch mal den kompletten Teil von der Gleichung *[I hält zweiten Quadranten zu]*.
	52	S	Jo.
	53	I	Ja. Kannst du dir das vorstellen, wenn das nur dieser Teil hier gegeben wäre *[I zeigt auf ersten und vierten Quadranten]*. Du kannst dir auch gerne eine Skizze dazu machen.
15:01	54	S	Was ich mir da jetzt vorstellen könnte, was das ist?
	55	I	Wie du das dann beschriften würdest. - - *[3 Sekunden]* Weil du bist ja in \`nem, der Taschenrechner sagt dir das, du hast vom Abzählen ja was anderes raus.
	56	S	*[S tippt auf dem Taschenrechner]* Ne das kommt hin. Hier 0 und 3 *[S zeigt auf den Ursprung und den Wert 3, an dem der Graph die y-Achse berührt]*
	57	I	Okay.
	58	S	Da ist gleich.
	59	I	Also, das ist das was du sagst, und auch das, was der Taschenrechner dir sagt?
	60	S	Ja
	61	I	Dann kannst du das vielleicht mal einfach aufschreiben.
	62	S	*[S Schreibt (0/3) auf gesondertes Blatt]*
15:40	63	I	Okay, was meinst du denn jetzt, was die anderen Punkte auf der y-Achse wären?
	64	S	- -*[Pause 3 Sekunden]* Da sind doch keine mehr.
	65	I	Ja natürlich, aber die hier alle *[I zeigt auf y-Achse]*, wie würdest du die hier generell beschriften?
	66	S	Achso äh, ja wenn ich jetzt nach von hier aus ausgehen würde, dann wäre 1, 2, 3, 4, 5, 6 *[S Beschriftet y-Achse]*. Und ähm, wenn ich aber hier das nehmen würde *[S zeigt auf Graf im zweiten Quadranten und schaut auf den Taschenrechner]* müsste das ja laut Taschenrechner 8 sein.
	67	I	Okay.

In diesem Abschnitt des Interviews wird deutlich, dass Sören in der Lage ist Fehler zu erkennen. Er gibt in Absatz 44 an, dass die x-Achse in Einserschritten und die y-Achse in 0,5er Schritten beschriftet werden muss. Scheinbar scheint er die Achsen miteinander zu vertauschen. Aus welchen Gründen dies geschieht wird nicht deutlich. Möglicherweise kann dies an der Eingabe in den Taschenrechner liegen. Seinen Ansatz führt er in Absatz 46 fort. Hier beginnt er Teile des Koordinatensystems zu beschriften. Er führt seinen Gedankengang nicht komplett aus, da zu erkennen ist, dass er 6,5 an die Stelle 5,5 des Koordinatensystems schreibt, was er im weiteren Verlauf des Interviews allerdings verbessert. Anschließend findet er einen Unterschied zu den Werten seines Taschenrechners. Unter der Hilfestellung, den zweiten Quadranten zu missachten, soll er die Aufgabe erneut lösen. Er erhält den Wert 3 an der Stelle, wo der Graph die y-Achse trifft. Es wird somit deutlich, dass ihn der zweite Quadrant zu verwirren scheint. Schließlich ist er nun in der Lage die y-Achse richtig zu beschriften. Durch die Verwirrung des Taschenrechners, scheint er nun auch die Idee verworfen zu haben, dass eine der Achsen in 0,5er Schritten beschriftet werden muss. Anschließend soll Sören unter einer Hilfsaufgabe versuchen die x-Achse zu beschriften. Scheinbar fehlt ihm hier eine passende Strategie und beschriftet auch die x-Achse mit einer Schrittweite von 1. Es wird hier ganz klar deutlich, dass Sören Fehler erkennen kann, jedoch keine nötigen Strategien kennt sein Ergebnis zu überprüfen. Dies liegt möglicherweise daran, dass Sören ausschließlich den Taschenrechner zur Lösungsfindung nutzt. Da er nicht versteht wie der Taschenrechner die zugehörigen Werte ermittelt, fällt auch eine alternative Lösungsidee schwer. Es wird also erneut deutlich, dass die algebraische Darstellungsebene nicht verstanden wurde.

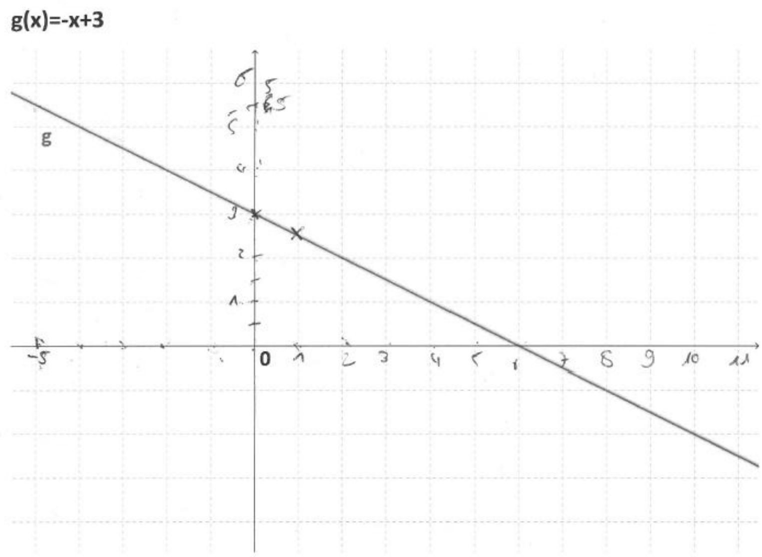

Abbildung 3: Lösung Testaufgabe 2 - Sören

Sören wird anschließend dazu aufgefordert sich auf Basis seines erstellten Koordinatensystems eine Sachsituation vorzustellen. Hierzu überträgt er das Wissen aus der ersten Testaufgabe. Jedoch fällt es ihm schwer einen Zusammenhang zum zweiten Quadranten zu finden.

Zum Abschluss erhält Sören die zweite Beispielaufgabe, welche einen Aufschluss über sein Verständnis zur situativ-sprachlichen Darstellungsebene geben soll.

Tabelle 6: Transkript 6 - Sören

Time-Code	Absatz	Person	Inhalt
18:25	68	I	Lies dir doch das mal durch *[S erhält die Aufgabe mit dem Stein]*. Lies das am besten mal vor.
	69	S	Ein Stein wird aus drei Metern Höhe fallen gelassen. Gib an wann der Stein den Boden trifft. Auf welcher Höhe befindet sich der Stein nach einer Sekunde?
	70	I	Kannst du dir vorstellen, dass das hier den *[I zeigt auf den ersten Quadranten]* Bereich beschreibt?
	71	S	Ja.
	72	I	Dann beantworte mir doch mal die Frage. Gib an wann der Stein den Boden trifft.
	73	S	[S *Schaut auf den Funktionsgraphen]* Nach – 6 Sekunden.
	74	I	Genau. Und ähm, auf welcher Höhe befindet sich der Stein nach einer Sekunde? Was müsstest du dazu machen?
	75	S	Ähm 2,5. Da könnte ich in das Koordinatensystem gucken, und das ablesen.
	76	I	Okay, mach das doch einfach mal. Zeichne dir am besten was da rein.
19:13	77	S	[S *macht ein Kreuz auf den Graphen bei einem x-Wert von 1*] Hier. Das wär nach einer Sekunde. 2,5.
	78	I	Okay, und was würde denn jetzt dieser *Bereich [I zeigt auf zweiten Quadranten]* dann bedeuten, was könnte man da für `ne Frage stellen?
	79	S	[S *schaut auf den Funktionsgraphen] - - [Pause 5 Sekunden]* Äh. - - *[Pause 4 Sekunden]* Wüsste ich jetzt nicht.
	80	I	Du sagst das ist die positive Zeit *[I zeigt auf positiven x-Werte Bereich]* und das ist die positive Höhe *[I zeigt auf positiven y-Werte Bereich]* Was ist denn dann das *[I zeigt auf negativen x-Werte Bereich]* und *das [I zeigt auf negativen y-Werte Bereich]*?
	81	S	Ja das ist halt Minus.
	82	I	Genau.
	83	S	Das ist halt 0 Sekunden. Und das ist dann halt -1 Sekunde, -2, -3, -4, -5 *[S zeigt auf die negativen x-Werte]*
	84	I	Okay, -1, -2, -3 hört sich ja sehr mathematisch an. - - Hier sagst du in einer Sekunde. In zwei Sekunden. Was sagst du auf der anderen Seite?
	85	S	Keine Ahnung.
	86	I	Okay, da würde man sowas fragen wie vor wieviel Sekunden, vor wieviel Sekunden…
	87	S	…Achso. Vor ja okay.
20:28	88	I	Jetzt stell dir vor, wir sind immer noch auf 3 Meter Höhe.
	89	S	Ja.
	90	I	Ja? Wir lassen den Stein fallen. Warum kann es sein, dass eventuell der Graph hier unten weiter geht *[I zeigt auf vierten Quadranten]*?
	91	S	Weil der in den Boden rein drückt?
	92	I	Zum Beispiel. Das wäre `ne gute Möglichkeit. Bei einem besonders schweren Stein zum Beispiel.

Er löst die Aufgaben seines Koordinatensystems richtig. Schließlich schafft er es eine Verbindung zwischen Graph und Sachsituation herzustellen. Einen Zusammenhang für den zweiten Quadranten zu finden fällt ihm allerdings schwer. Der vierte Quadrant hingegen fällt ihm leicht.

Fasst man die Ergebnisse von Sören abschließend zusammen, so wird deutlich, dass er mit der Graphischen Darstellungsebene umzugehen weiß. Schließlich kann er sowohl Aufgaben auf Basis des Funktionsgraphen lösen, sowie auch die numerisch-tabellarische Funktionsebene mit der graphischen verknüpfen. Zwar weiß er nicht konkret wie eine Wertetabelle angefertigt wird, kann allerdings Zuordnungen treffen, wenn diese durch den Taschenrechner gegeben sind. Er ist in der Lage einen Funktionsgraphen zu beschreiben. Ein Verständnis zur algebraischen Darstellungsebene ist nicht vorhanden. Die situativ-sprachliche Darstellungsebene kann Sören scheinbar nutzen. Zwar benötigt er Hilfestellungen, allerdings ist eine Verknüpfung zwischen Außer- und Innermathematik möglich.

4.1.2 Analyse Interview 2

Das zweite Interview wurde mit Julian durchgeführt, welcher zum Zeitpunkt der Datenerhebung die achte Klasse eines Gymnasiums besuchte.

Zunächst beschreibt Julian das Koordinatensystem. Auf Nachfragen kann er auch die Funktionsgleichung beschreiben. In *Tabelle 7: Transkript 1 – Julian* ist zu erkennen, dass er das x richtig als Variable betitelt. Dies macht deutlich, dass er scheinbar ein Verständnis über die formal-symbolische Darstellungsebene besitzt.

Tabelle 7: Transkript 1 - Julian

Time-Code	Absatz	Person	Inhalt
1:48	1	I	Okay, du hast grade schon richtig gesagt, dass du da eine Gleichung sehen kannst. Kannst du mir diese Gleichung einfach einmal beschreiben?
	2	J	Ähm – also f mal x, also mit f ist ja die Grade benannt, ist dann gleich 2 mal der Wert von x. Und x ist ja `ne Variable, dafür muss dann irgendein Wert eingesetzt werden.
	3	I	Genau, ich weiß nicht wie das bei euch in der Schule gemacht wird, deswegen sag ich`s dir jetzt, du kennst das vielleicht als y=2x. 2 mal x oder?
	4	J	Ja, kenn ich.
	5	I	Genau, dann denk dir das einfach, schreib dir das am besten da drüber.
	6	J	Kann ich auch einfach ein gleich…
	7	I	… geht auch. Genau, ich glaub das ist verständlicher für dich als dieses f(x).
	8	J	Ja.
2:37	9	I	So, kannst du- Du hast ja jetzt einiges schon beschrieben. Deine Aufgabe ist es jetzt, dass du diese Achsen, da ist ja gar keine Beschriftung dran. Dass du diese Achsen so beschriftest, dass das zu dieser Funktion

			[I zeigt auf Funktionsgleichung] passt. – Kannst du das? Kannst du auch mir sagen, wenn du weißt wie man das macht, wie das geht?
	10	J	Also normale Achsen ist ja die x-Achse ist die waagerechte.
	11	I	Mhm.
	12	J	Und die y-Achse ist ja dann *[J beschriftete die x-Achse mit x und die y-Achse mit y]*.
	13	I	Genau, das ist schon mal schön.
3:10	14	I	Ähm, und jetzt fehlen da ja diese Zahlenwerte.
	15	J	Ja.
	16	I	Weißt du wie du das machst, dass diese Funktion *[I zeigt auf Funktionsgleichung]* zu diesem Graphen *[I zeigt auf Funktionsgraphen]* passt?
	17	J	-Wahrscheinlich, der y-Wert muss doppelt so groß sein wie der x-Wert *[J beginnt abwechselnd die x- und y-Achse richtig zu beschriften] [J schaut I an]*
	18	I	Mach einfach mal.
	19	J	*[J beschriftet die restlichen Werte der x- und y-Achse, nur im Positiven Wertebereich]*
	20	I	Okay, wie kommst du da drauf, kannst du mir beschreiben warum …
3:50	21	J	… Weil das ja `ne Gleichung ist, und da steht, dass die Funktion von x gleich y entspricht. – Oder 2 mal x halt.
	22	I	Mhm.
	23	J	Und das Doppelte von x ist dann in dem Fall dann 2 halt.
	24	I	Okay.
	25	J	Also jetzt bei der, bei dem ersten Punkt hier *[J zeigt auf den Wert 1 der x- Achse]*.
	26	I	Das ist sch- Das ist ein sehr guter Ansatz. Ähm, kannst du das auch irgendwo überprüfen ob du Recht hast?
14:14	27	J	-- *[Pause 5 Sekunden]* Mh ja, 2 mal, also…
	28	I	… Du darfst da rein malen, das ist gar kein Problem. Du hast sonst auch noch `nen Bleistift irgendwie da liegen.
	29	J	Dies ist, da ist ja schon `ne Grade drin, und die Punkte kommen ja immer darauf *[J zeigt auf die Punkte im Funktionsgraphen, an denen sich x- und y-Werte treffen würden]*.
	30	I	Mhm.
	31	J	Und, wenn d. die Werte von der x- Achse mal 2, dann sind die immer hier auf dem Punkt, was dann halt 6 ist, weil 3 mal 2.*[J zeigt während der Erklärung auf den Wert 3 der x- Achse, geht parallel zur y-Achse zum Graphen und erkennt dann den Wert 6 der y-Achse.]*
	32	I	Okay, das ist schon mal sehr schön.

Weitergehend ist zu erkennen, dass Julian dazu in der Lage ist eine Verknüpfung zwischen Funktionsgleichung und Funktionsgraphen herzustellen. In Absatz 17 und 21 ist zu wird deutlich, wie er dabei vorgeht. Er interpretiert die Bedeutung der algebraischen Darstellungsebene und überträgt dies auf das Koordinatensystem. Dazu benötigt er keine Wertetabelle, da er scheinbar den Sinn der Funktionsgleichung verinnerlicht hat. In Absatz 31 ist jedoch erkennbar, dass er gedanklich eine Wertetabelle anfertigen könnte. Schließlich beschreibt er, wie man die Wertetabelle erstellen könnte.

Anschließend soll Julian sich eine Sachsituation zu dem gegebenen Funktionsgraphen vorstellen. Hierzu benötigt Julian keine Hilfskarten.

Tabelle 8: Transkript 2 - Julian

Time-Code	Absatz	Person	Inhalt
4:45	33	I	Mh, Ähm, kannst du dir eventuell eine Situation dazu vorstellen?
	34	J	Ähm, wenn zum Beispiel eine Gondel jetzt bei, die einen Berg rauf fährt.
	35	I	Mhm
	36	J	Die fährt ja mit gleicher Geschwindigkeit die gleiche Anzahl an Metern, also da würde man jetzt die y-Achse mit, ähm, mit äh Geschwindigkeit – Nein Stopp. Dann - - Also man müsste y und x werten halt – Was heißt werten, also ähm *[J schaut I an]…*
	37	I	… Sonst versuch es anders zu erklären.
	38	J	Ja, wenn man zum Beispiel jetzt die Geschwindigkeit, ne die Zeit und die Strecke…
	39	I	…Mhm…
5:42	40	J	… Also ich mach`s jetzt mal Zeit und Strecke, und dann würde ich jetzt die x-Achse mit ähm der Strecke beschriften *[J schreibt Strecke ans Ende der x-Achse]* und die y-Achse mit der Zeit *[J schreibt Zeit ans Ende der y-Achse]*. Wenn jetzt irgendwas, was zurücklegt. Das heißt 1 Meter legt `se jetzt – das ist jetzt unrealistisch *[J grinst]*, aber in 2 Minuten zurück, oder 1 Kilometer in 20 Minuten, und dann 2 Kilometer in 40 Minuten, das würde dann auch die ganze Zeit bei der Geraden *[unverständlich; vermutlich: „zu finden sein."].[Während der gesamten Erklärung zeigt J auf verschiedene Stellen des Koordinatensystems]*
	41	I	Okay, wie wäre es denn dann in diesem unteren Bereich *[I zeigt auf den dritten Quadranten]?*
	42	J	Das geht ja nicht mit, jetzt mit Strecke und Zeit, weil negativ, es kann ja nicht negativ als vor dem Zeitpunkt ja-ähm- wo man gestoppt hat sein.
6:30	43	I	Könntest du dir da was anderes zu vorstellen?
	44	J	Ähm – mit - - der mit Höhenmetern - - und Temperatur`*[J schaut I an]*. Also wenn etwas unterm Meeresspiegel ist ja auch ähm mit Minus beschriftet und Temperatur kann ja auch unter 0 Grad sein.
	45	I	Ja das ist schon mal ein sehr schöner Ansatzpunkt.

In Absatz 36 wird demnach deutlich, dass er eine außermathematische Situation zu einem innermathematischen Sachverhalt rekonstruieren kann. Zwar scheint er hierbei Probleme damit zu haben die x- und y-Achse richtig zu wählen, was in diesem Kontext jedoch nicht von großer Bedeutung ist. Weitergehend ist dies nicht als falsch zu beurteilen, allerdings ist es unüblich die Zeit in Abhängigkeit einer Strecke darzustellen. Er verknüpft eine situativ-sprachliche Darstellungsebene mit dem Funktionsgraphen, indem er angibt, dass eine Gondel den Graphen beschreiben könnte. Zudem wird in Absatz 40 seines Interviews klar, dass er einschätzen kann, ob angenommene Werte realis-

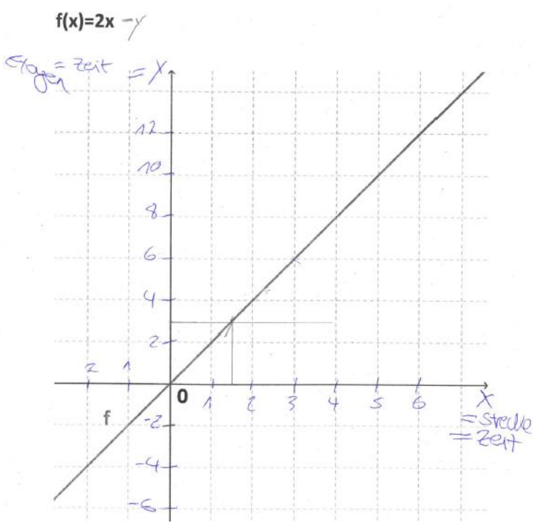

Abbildung 4: Lösung Testaufgabe 1 - Julian

tisch erscheinen. Folglich passt er die Werte der Achsenbeschriftung an seinen gewählten Kontext an. In Absatz 42 wird dies ebenfalls deutlich, da er die Achsenbeschriftung des negativen x-Wertebereichs ebenfalls an seine gewählte Situation anpasst (vgl. Abbildung 4). Er macht klar, dass die Zeit nicht rückwärts laufen kann. Dass hier eine andere Fragestellung gewählt werden könnte, fällt ihm nicht auf. Auf der y-Achse fällt ihm dies leichter. Schließlich gibt es Sachsituationen die einen negativen Bereich beschreiben könnten, wie die Temperatur oder Höhenmeter. Ein konkreter Bezug zum Funktionsgraphen bleibt jedoch aus.

Um einen Einblick darüber zu erhalten, wie Julian mit Sachaufgaben umgehen kann, erhält er anschließend die Beispielaufgabe. Dies löst er, indem er den Dreisatz verwendet. Demnach schafft er es eine formal-symbolische Darstellungsebene mit einer sprachlich-situativen Repräsentationsebene zu verknüpfen, auch wenn er die gegebenen Werte nicht in die Funktionsgleichung einsetzt. Zudem überprüft er sein Ergebnis mittels des Funktionsgraphen. Folglich scheint Julian auch diese Richtung des Darstellungswechsels zwischen sprachlicher und graphischer Ebene verinnerlicht zu haben. Um einen erweiterten Einblick darüber zu erhalten, ob Julian nun einen Zusammenhang zwischen Realität und dem dritten Quadranten des Koordinatensystems herstellen kann, wird er auch hier zur Bedeutung dessen befragt.

Tabelle 9: Transkript 3 - Julian

Time-Code	Absatz	Person	Inhalt
11:12	46	I	Kannst du in dem Kontext vielleicht beschreiben, dieser, dieser Abschnitt *[I zeigt auf dritten Quadranten]*, dieser untere Abschnitt bedeuten könnte?
	47	J	- -Ähm, wenn man – es könnte, aber man kann mit der Zeit ja nicht in Minus-Bereich gehen *[J schaut I an]*. Also in negativen Bereich. Man kann ja nicht weniger brauchen, als 0 Minuten.
	48	I	Ja versuch`s erstmal nur mit der y-Achse.
	49	J	- -Ach das hat mich grade irritiert, weil da Zeit stand *[J zeigt auf seine Vorüberlungen aus seiner eigenen Sachsituation*]. Achso ups, ähm, wenn die y-Achse, die ist ja dann die Etagen, und dann könnte ich noch halt Untergeschosse geben. Das wäre dann – Soll ich beschriften wieder?
	50	I	Kannst du gerne machen.
	51	J	*[J beginnt die y-Achse im negativen Wertebereich zu beschriften*] Das wären dann, ähm, Minus 2, Minus 4, Minus 6.
	52	I	Okay…
12:07	53	J	…Und an der Zeit müsste dann halt - - dasselbe wie da *[J zeigt auf den positiven x-Werte Bereich]* stehen, weil Zeit kann nicht in den Minus Bereich gehen. Dann wäre es 1 und 2. *[J beschriftete negativen x-Werte Bereich]*. Weile außer man geht Treppen runter und das würde dann weniger Zeit brauchen, aber…
	54	I	…okay, das kommt immer ein bisschen auf die Fragestellung an, du könntest jetzt hier zum Beispiel sagen wie viele, wie viele Minuten, in wieviel Minuten bist du da *[I zeigt auf positiven Wertebereich]*…
	55	J	…Ja.
	56	I	Und hier könntest du sagen, vor wieviel Minuten bist du losgegangen,…

	57	J	…Ja…
	58	I	…um da und da hin zu kommen. Ne, das kommt immer drauf an, was du…
12:35	59	J	… Ja aber wenn es jetzt darum geht, dass ich die Treppen runter gehen will, jetzt ins dritte Untergeschoss, dann - und ich genauso lange für eine Etage brauche, für wie wenn ich hoch gehe, dann wäre das so richtig oder?
	60	I	Genau, das ist ein guter Ansatz, wunderbar.

Julian findet einen geeigneten Kontext für die y-Achse. Diesen hatte er zuvor richtig mit der Anzahl der Etagen beschriftete. Ihm ist klar, dass der negative y-Wertebereich Untergeschosse darstellen könnte. Mit der Zeit scheint er auch hier Probleme zu haben. Jedoch beschreibt er seinen Gedankengang wie zuvor auch, dass die Zeit nicht rückwärst laufen kann. In Absatz 59 wird klar, dass er den Graph-als-Bild-Fehler begeht. Dies kann man daran erkennen, dass er angibt, dass der dritte Quadrant das herunterlaufen beschreiben könnte. Zu seiner Beschriftung passt dies allerdings nur, da er keine negativen Werte auf der x- Achse annimmt.

Julian erhält die zweite Testaufgabe und soll auch hier beschreiben, was er sieht. Er beschreibt die Eigenschaften der Funktion. Anschließend soll er die Achsen beschriften. Im Gegensatz zur ersten Aufgabe scheint ihm hier eine passende Strategie zu fehlen. Dies kann möglicherweise mit der Verschiebung des Graphen auf der y-Achse zusammenhängen. Schließlich löste Julian die vorherige Aufgabe durch die Interpretation der Funktionsgleichung. Dies scheint ihm hier schwer zu fallen. Wie zuvor zu erkennen, wendet Julian nicht die Strategie des Einsetzens von Werten in die Funktionsgleichung an. Dies lässt darauf schließen, dass Julian diese Methode möglicherweise nicht bekannt ist. Damit Julian die Aufgabe lösen kann, erhält er die Hilfsaufgabe. Anhand dessen kann er die Achsen richtig beschriften, und schafft es ebenso die Aufgabe unter Hilfe des Koordinatensystems richtig zu lösen.

Abschließend soll Julian einen Zusammenhang zum zweiten und vierten Quadranten des Koordinatensystems finden.

Tabelle 10: Transkript 4 - Julian

Time-Code	Absatz	Person	Inhalt
20:32	61	I	Okay, und jetzt hast du ja grade gesagt, der Stein könnte ja nicht weiter fallen, was könnte das denn sonst bedeuten da unten? Warum geht das noch weiter? Warum könnte das eventuell weiter gehen?
	62	J	-Der Stein fällt ins Wasser.- Und dann ist er unterm Meeresspiegel.
	63	I	Zum Beispiel, oder ein Loch ist im Boden, ne. Das kann ja auch sein…
	64	J	…wie auch immer ja.
	65	I	Ne? Das wäre ja auch möglich.
	66	J	Und dann wäre, dann ging es halt weiter, nach vier Sekunden – würde es sich auf einer Höhe von -1 Meter *[J beschriftet x- du y-Achse weiter]*, nach 5 Sekunden befindet es sich auf einer Höhe von -2 Metern, und so weiter, aber da ist, das Koordinatensystem ist vorbei.

	67	I	Was könnte dieser Bereich denn dann bedeuten? *[I zeigt auf zweiten Quadranten]*
21:22	68	J	--Ähm, ich würd`s halt wie ich da auch eben beschriftet hab einfach gleich beschriften *[J schreibt 1 und 2 an die negative x-Achse]*, weil Zeit kann nicht in den Minus-Bereich, Zeit kann nicht in Minus-Bereich kommen. Deswegen.
	69	I	Okay, das kannst du so machen.
	70	J	Aber, es, ich glaub das geht dann auch- so rum- ne geht's nicht, alles gut.
	71	I	Okay, ähm, dann wären wir auch schon durch und wir wären fertig. […]

In Absatz 61 wird klar, dass er einen Zusammenhang zum vierten Quadranten finden kann. Es bleibt zwar unberücksichtigt, dass sich die Steigung des Steins im Wasser ändern würde, dies ist für das Alter der Lernenden jedoch nur schwer vorstellbar. Auch wird deutlich, dass er die x-Achse im zweiten Quadranten erneut mit positiven Werten beschriftet. Er behält seine Strategie demnach bei.

Fasst man abschließend die Ergebnisse von Julian zusammen, so fällt aus, dass er in der Lage ist einen Zusammenhang zwischen Inner- und Außermathematik herzustellen. Einzig der negative x-Wertebereich bereitet ihm Probleme. In seinen Sachsituationen ergeben diese allerdings einen Sinn. Weitergehend knüpft er viele Verbindungen zwischen den Darstellungsebenen. Er ist in der Lage Verknüpfungen zwischen der graphischen und der sprachlichen Darstellungsebene in beide Richtungen herzustellen. Auch gelingt es ihm mittels des Dreisatzes eine Verknüpfung zur algebraischen Darstellungsebene zu schaffen. In der ersten Testaufgabe wird ein klares Verständnis über die Verbindung zwischen Gleichung und Graph deutlich. Dies fällt ihm erst in der zweiten Testaufgabe schwer, was möglicherweise an der vorhandenen Verschiebung des Graphen auf der y-Achse liegt. Julian scheint ein grundlegendes Verständnis zu linearen Funktionen aufgebaut zu haben.

4.1.3 Analyse Interview 3

Das dritte Interview wurde mit Emma durchgeführt. Emma besuchte die gleiche Klasse wie Julian.

Auch Emma soll zunächst das Gesehene beschreiben. Hierbei geht sie ausschließlich auf das Offensichtliche ein. Auch sprachlich hat sie Probleme sich auszudrücken. Als Emma dazu aufgefordert wird die Funktionsgleichung zu beschreiben hat sie Probleme. Es wird deutlich, dass sie den allgemeinen Aufbau einer Funktionsgleichung nicht zu kennen scheint.

Anschließend erhält Emma die Aufgabe, das Koordinatensystem so zu beschriften dass Gleichung und Graph zueinander passen.

Tabelle 11: Transkript 1 - Emma

Time-Code	Absatz	Person	Inhalt
2:17	1	I	Ähm, die Aufgabe die du lösen sollst ist im Endeffekt, dass du mir – du hast ja gesagt da sind keine Zahlen, dass du mir das so beschriftest, dass es dazu *[I zeigt auf die Funktionsgleichung]* passt.
	2	E	Okay.
	3	I	Kannst auch erstmal überlegen.
	4	E	Ähhh, ich denk einfach mal, dass pro Kästchen eins ist, weil sonst sehe ich eigentlich ja keine Regelmäßigkeit. Äh, soll ich das jetzt einfach dahin schreiben *[E zeigt auf das Koordinatensystem]*.
	5	I	Mach erstmal das was du denkst.
	6	E	*[E beschriftet die y-Achse in einer Schritten]*
	7	I	Okay.
	8	E	Und dann darf ich dasselbe noch mal hier unten *[E beschriftet die x-Achse in einer Schritten]*. Und hier auf der Minus *[E beschriftet negative x-Achse und y-Achse in einer Schritten]*.
3:28	9	I	Okay, wenn, normalerweise in der Schule habt ihr das wahrscheinlich so, dass ihr das bekommt *[I zeigt auf die Funktionsgleichung]…*
	10	E	…Mhm…
	11	I	…und dann euch gesagt wird, zeichnet das doch mal, oder?
	12	E	*[E nickt]*
	13	I	Mach das doch einfach mal. Du hast hier *[I zeigt auf leeres Blatt Papier]*, das ist zwar kein Linienpapier, aber du kannst dir das ja auf jeden Fall Skizzen, oder sonst was auf jeden Fall sonst machen. Wie wäre es wenn du das einfach mal machst?
3:50	14	E	Okay, jetzt ein Koordinatensystem zeichnen?
	15	I	Genau, und das *[I zeigt auf Funktionsgleichung]* da rein zeichnen,
	16	E	*[E zeichnet ein Koordinatensystem]*
	17	I	Diese Funktion *[I zeigt auf Funktionsgraphen]* kannst du missachten, es geht jetzt nur hier rum *[I zeigt auf Funktionsgleichung]*.
	18	E	Okay.
	19	I	Okay, wie kommst du da jetzt drauf?
4:30	20	E	Ähm, weil hier dieses y *[E zeigt auf y=2x]*, weil auf der y-Achse steht, ähm y=2x und dann muss man bei der 2 bei der x-Achse die Linie einzeichnen, glaube ich.
	21	I	Okay, weißt du, wie so lineare Funktionen generell aussehen?
	22	E	Mhja, da ist einfach dieser- diese Linie durch den Nullpunkt, oder halt durch diese anderen Zahlen auf der x- oder y-Achse gezeichnet.
	23	I	Okay, und die Gleichung, die, der linearen Funktionen?
5:06	24	E	Ich glaub, das ist y=2*x.
	25	I	Okay, sagt dir y=mx+b etwas? Oder ax+b?
	26	E	Ja.
	27	I	Kennst du das?
	28	E	Ja.
	29	I	Schreib das einfach mal auf.
	30	E	*[E schreibt sich Gleichung auf]*
	31	I	Kannst du mir erklären, was die Buchstaben da bedeuten?
	32	E	Mhhh, ne.
	33	I	Okay.

In Absatz 4 wird deutlich, dass Emma ein ihr bekanntest Schema versucht auf diese Aufgabe zu übertragen. Sie begründet dieses Vorgehen mit einer Regelmäßigkeit. Sie scheint demnach keine Verknüpfung zwischen Funktionsgraph und Funktionsgleichung herstellen zu können. Dies kann möglicherweise daran liegen, dass sie den Aufbau von linearen Funktionen nicht zu kennt. Um Emma eine weitere Möglichkeit zu geben einen Zusammenhang zwischen diesen Darstellungsebenen herzustellen, wird sie anschließend gebeten die Funktion selber zu zeichnen. Emma beginnt ein Koordinatensystem zu zeichnen, welches in *Abbildung 5: Mitschrift Emma – Testaufgabe 1* zu erkennen ist. Hier wird erneut klar, dass sie den Aufbau der Funktionsgleichung nicht verinnerlicht hat. Auch in Absatz 20 ihres Interviews wird dies deutlich. Schließlich gibt sie hier an, dass der Parameter 2 vor dem x angibt an welcher Stelle die Funktion die x-Achse trifft. Dieser Fehler wird, wie bereits im theoretischen Hintergrund erwähnt, von vielen Schülerinnen und Schülern begangen. Grund hierfür ist es, dass einige Lernende denken, dass es neben einem y-Achsenabschnitt, auch einen x-Achsenabschnitt geben muss. Die anschließende Frage, ob Emma wisse, wie lineare Funktionen generell aussehen, wird mit Mängeln beantwortet. Schließlich gibt sie in Absatz 32 an, die Bedeutung der einzelnen Variablen und Parametern nicht zu kennen. Aufgrund dessen, dass Emma die formal-symbolische Repräsentationsform nicht verinnerlicht hat, wird im folgenden Interview versucht darauf zu achten, ausschließlich die graphische Ebene zu berücksichtigen.

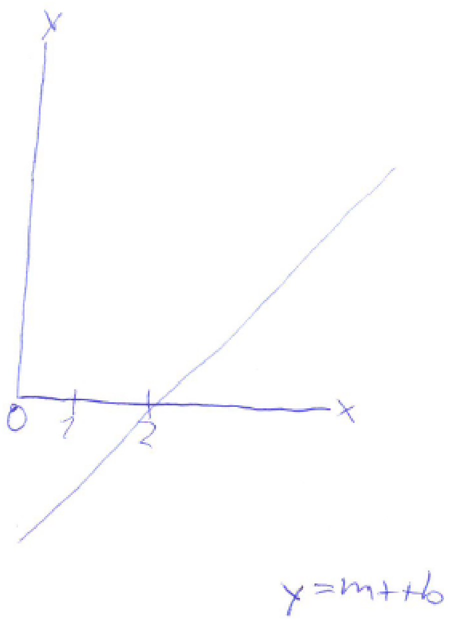

Abbildung 5: Mitschrift Testaufgabe 1 - Emma

Daraufhin soll herausgefunden werden, ob Emma eine Verknüpfung zwischen Inner- und Außermathematik herstellen kann. Hierzu wird ihr falsch beschriftetes Koordinatensystem verwendet.

Tabelle 12: Transkript 2 - Emma

Time-Code	Absatz	Person	Inhalt
5:31	34	I	Ähm, dann geh mal wieder hier zurück *[I zeigt auf den Funktionsgraphen]*.
	35	E	Mhm.
	36	I	Ähm, in Schulbüchern ist es ja oft so, dass ihr Sachaufgaben bekommt.
	37	E	Ja.

	38	I	Kannst du dir `ne eigene Aufgabe hierzu ausdenken? Das brauchst du gar nicht mehr beachten hier oben *[I verdeckt Funktionsgleichung]* nur hierzu *[I zeigt auf Funktionsgraphen]*.
	39	E	Ähm, ich glaub ich würd dann einfach schreiben ja zeichne den Punkt bei y 3 und x 4 ein, ungefähr so.
	40	I	Okay. Und `ne Alltagssituation so? Weißt du dazu etwas?
	41	E	Mh. Nein.
6:13	42	I	Okay, ich hab hier `nen bisschen Hilfe für dich. *[I legt Hilfskarte an die y-Achse]* Stell dir doch mal vor die y-Achse ist `ne Höhe, zum Beispiel ein Stockwerk in einem Gebäude, Etagen oder sonst was. Und die x-Achse ist `ne Zeit, zum Beispiel in Minuten.
	43	E	Mhm.
	44	I	Kannst du dir da jetzt eine Sachsituation, also eine Alltagssituation zu vorstellen.
6:30	45	E	Ja ich denke, wie lange man braucht um ganz oben auf das Gebäude drauf zu kommen`.
	46	I	Zum Beispiel.

Absatz 39 verdeutlicht, dass Emma keine Vorstellung zu Sachaufgaben hat. Sie versucht das Gesehene in Worte zu fassen. Eine Alltagssituation kann Emma sich nicht vorstellen. Hierzu benötigt sie die Hilfskarten. Unter dieser Hilfestellung findet sie allerdings eine passende Situation. Hier geht sie allerdings nicht auf die Steigung ein. Dies kann damit zusammenhängen, dass sie keine Vorstellung zur algebraischen Darstellungsebene besitzt. Dieser Abschnitt macht deutlich, dass Emma klar Hilfestellungen benötigt um eine Verknüpfung zwischen Außer- und Innermathematik herzustellen.

Im Anschluss erhält Emma die Beispielaufgabe. Diese soll sie ausschließlich mittels ihres Koordinatensystems lösen. Es fällt auf, dass sie zwischen situativ-sprachlicher Darstellungsebene und graphischer Darstellungsebene eine Verknüpfung herstellen kann, da sie die Aufgabe richtig löst.

Die Einführung der zweiten Testaufgabe lässt vermuten, dass Emma de Objektvorstellung von linearen Funktionen nicht verinnerlicht hat. Zu erkennen ist dies an der mangelnden Beschreibung des Funktionsgraphen. Sie geht weder auf die Steigung noch auf den y-Achsenabschnitt ein. Auch dies kann man mit dem fehlenden Verständnis zur algebraischen Ebene zusammenhängen.

Tabelle 13: Transkript 3 - Emma

Time-Code	Absatz	Person	Inhalt
7:58	47	I	Okay, da oben ist wieder so `ne Gleichung.
	48	E	Mhm.
	49	I	Kannst du die beschreiben? Das wäre wieder y, ja? *[I zeigt auf f(x)]* y=-x+3, schreib das mal bitte dahin.
	50	E	*[E schreibt sich y=-x+3 auf]* - - Äh joa, ich denke einfach mal, das bei dem –x, das heißt dann, weil hier ist ja die x-Achse, dass man dann hier in den Minus-Bereich gehen muss *[E zeigt auf den negati-*

			ven x-Werte Bereich]. Und dann einfach 3 einzeichnen muss.
	51	I	Okay, also wie würdest du vorgehen, um jetzt genau einzu- einzuteilen.
	52	E	Äh, ich würde hier bei den Minusachse *[E zeigt auf x-Achse im negativen Wertebereich]* und dann einfach 3, äh, Kästchen weit gehen.
	53	I	Okay.

Obwohl Emma bereits in der ersten Testaufgabe den Aufbau von linearen Funktionsgleichungen nicht erklären konnte, wurde versucht auch in dieser Aufgabe ein Bezug zwischen symbolischer und graphischer Ebene herzustellen. Für sie bedeutet das negative Vorzeichen der Variable x, dass die Funktion im negativen x-Wertebereich beginnt. Die Steigung missachtet sie hier komplett. Auch versucht sie die 3 auf die x-Achse zu übertragen. Nach diesem Abschnitt ist klar festzuhalten, dass Emma keine Vorstellungen zu Funktionsgleichungen besitzt. Schließlich ist ihr der Aufbau nicht klar und sie kann weder die Steigung noch den y-Achsenabschnitt bestimmen. Als Emma daraufhin das Koordinatensystem beschriftet, geht sie wieder in Einserschritten vor. Das heißt, dass sie auch in dieser Aufgabe ein ihr bekanntes Schema der Regelmäßigkeit anwendet. Auch eine Sachsituation kann sich Emma zu diesem Funktionsgraphen nicht vorstellen. Ihr gelerntes Wissen aus der ersten Aufgabe scheint Emma nicht auf diese Aufgabe zu übertragen.

Um Emma eine erneute Möglichkeit zu geben die Aufgabe zu lösen, erhält sie erneut die zweite Testaufgabe. Dieses Mal sollen ihre Gedankengänge durch die Beispielaufgabe unterstützt werden. Eventuell wäre es möglich gewesen, dass sie einen Bezug zwischen diese Darstellungsebenen aufbauen kann, ohne die Funktionsgleichung zu berücksichtigen.

Tabelle 14: Transkript 4 - Emma

Time-Code	Absatz	Person	Inhalt
9:45	53	I	Okay, ich gib dir jetzt nochmal so ein Blatt *[E erhält erneut Aufgabenblatt zur zweiten Testaufgabe]* und ich gib dir diese Aufgabe *[E erhält Hilfskarte – Stein fallen lassen]*.
	54	E	Mhm.
	55	I	Als Hilfe, lies das auch mal vor.
	56	E	Ein Stein wird aus drei Metern Höhe fallen gelassen. Pro Sekunde fällt der Stein 1 m. Gib an wann der Stein den Boden trifft. Auf welcher Höhe befindet sich der Stein nach einer Sekunde?
	57	I	Okay, und versuch jetzt mit Hilfe dieser Karte das nochmal zu beschriften.
	58	E	Mh.
	59	I	Was wäre die x-Achse und was die y-Achse? Das ist erstmal am leichtesten so anzufangen.
10:24	60	E	Ich denke erstmal, dass die y-Achse die Höhe beschreiben soll und die x-Achse die Sekunden.
	61	I	Dann schreib dir das einfach mal dazu.
	62	E	*[E schreibt y=h und x=s über das Koordinatensystem]* Ähm, dann - -
	63	I	Den Teil *[I legt Karte auf den zweiten Quadranten um diesen abzudecken]* kannst du dir gerne erstmal weg denken.

	64	E	Mh. - - *[Pause 15 Sekunden]* Ich würd sagen, dass der Stein nach einer Sekunde, äh, auf der Höhe 3 ist.
11:21	65	I	Okay, du lässt den ja fallen aus zwei Meter Sekunden. Äh, aus 3 Meter Höhe, ja? Und du hast ja gesagt, hast du ja richtig gesagt, die y-Achse ist die Höhe.
	66	E	Mhm.
	67	I	Wie würdest du die y-Achse anhand dessen jetzt – beschreiben, also- einteilen?
	68	E	--*[Pause 6 Sekunden]* Äh.
	69	I	Fragen wir mal anders, wo auf der y-Achse ist denn die 3?
	70	E	Hier *[E zeigt auf den Schnittpunkt des Graphens mit der y-Achse]*.
	71	I	Okay, zeichne das einfach mal ein.
	72	E	*[E schreibt 3 an den Schnittpunkt]*
	73	I	*[Gespräch unabhängig des Themas]*
12:05	74	I	So, kannst du anhand dessen die restliche y-Achse – beschriften?
	75	E	Joa [E *beschriftet y-Achse mit 1, 2, 3…]*
	76	I	Ich nehme das mal weg, das brauchst du trotzdem erstmal nicht zu beachten ja? *[I nimmt Hilfskarte weg, die den zweiten Quadranten verdeckt]*. Okay. So, dann steht da ja `ne Information.
	77	E	Mhm.
	78	I	Was für `ne wichtige Information steht auf dieser Karte?
	79	E	Äh, dass der Stein pro Sekunde ein Meter fällt.
	80	I	Okay. Und jetzt möchtest du überlegen, wie du die x-Achse beschriftest. Was musst du dazu dann machen?
12:40	81	E	--Äh, also wenn der Stein pro Sekunde einen Meter fällt - müsste hier ja auch, eigentlich so wie hier [E *möchte die x-Achse in einer Schritten einteilen]* die Sekunden eingezeichnet werden *[E beschriftet x-Achse in einer Schritten]*.
	82	I	*[Gespräch unabhängig des Themas]*
	83	I	Äh, kannst du, ähm, das irgendwie überprüfen, ob du Recht hast?
	84	E	Hm, nach der Logik her? --*[Pause 12 Sekunden]*
	85	I	Nicht?
	86	E	*[E Schüttelt den Kopf]*
	87	I	Okay.

Unter Berücksichtigung der Beispielaufgabe kann Emma die x- und y-Achse richtig zuordnen (vergleiche Absatz 60). Um Emma nicht zu verwirren, wird der zweite Quadrant verdeckt. Nun soll sie herausfinden, wie sie die Achsen beschriften und einteilen kann. Sie versucht zunächst die Fragestellung zu beantworten, und gibt an dass sich der Stein nach einer Sekunde auf einer Höhe von drei Metern befindet. Auf weitere Nachfragen gibt sie jedoch an, dass sich die Drei an dem Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse befindet. Auf Basis dieser Information ist sie in der Lage die restliche y-Achse zu beschriften. Als sie nun anschließend dazu aufgefordert wird die x-Achse zu beschriften, versucht sie die Informationen der Testaufgabe zu verwenden. Fälschlicherweise geht sie davon aus, dass sie die x-Achse in einer Schrittweite von eins beschriften muss, da der Stein pro Sekunde einen Meter fällt. Begründet wird dies in Absatz 84. Der letzte Abschnitt des Interviews macht demnach klar, dass Emma keine Verbindung zwischen der graphischen und sprachlich-situativen Darstellungsebene herstellen kann. Sie fehlinterpretiert die gegebenen Angaben aus der Beispielaufgabe und kann diese nicht auf das Koordinatensystem übertragen.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass Emma kein tragfähiges Verständnis zu linearen Funktionen besitzt. Sie ist nicht in der Lage verschiedene Darstellungsebenen miteinander zu verknüpfen. Dies liegt insbesondere daran, dass sie den Aufbau von Funktionsgleichungen nicht verinnerlicht hat. Weitergehend fällt es ihr schwer die Inner- und Außermathematik in Verbindung zu bringen. Sie wendet bekannte Schemata auf neue Aufgaben an, ohne diese zu reflektieren. Zudem benötigt Emma viele Hilfestellungen.

4.1.2 Analyse Interview 4

Annika besucht ebenfalls die gleiche Klasse, wie Julian und Emma.

Als Annika die Aufgabe erhält das Koordinatensystem zu beschreiben, wird deutlich, dass sie Hilfestellungen benötigt. Auch bei der Beschreibung der Funktionsgleichung braucht Annika Hilfe. Unter den Kommentaren des Interviewers schafft sie es jedoch, Auffälligkeiten der graphischen Darstellungsebene zu beschreiben. Bei der algebraischen Darstellungsebene scheint Annika Schwierigkeiten zu haben, was zunächst vermuten lässt, dass sie kein Verständnis zu dieser Repräsentationsebene besitzt.

Darauf folgend soll Annika die Achsen der ersten Testaufgabe beschriften.

Tabelle 15: Transkript 1 - Annika

Time-Code	Absatz	Person	Inhalt
2:25	1	I	Ähm, und das ist jetzt deine Aufgabe. Beschrifte das, allerdings so, dass es hierzu *[I zeigt auf die Funktionsgleichung]*, zu den Gleichungen, die du hast, passt. - - Kannst gerne drüber nachdenken.
	2	A	--*[Pause 6 Sekunden]* Okay. *[A beschriftet die x- und y-Achse in einer Schritten]*
	3	I	Mach mal weiter *[I steht auf, holt erneut Testaufgabe 1]*
3:53	4	I	Okay, wie kommst du da drauf?
	5	A	Ähm, so hatten wir das ungefähr immer in der Schule, so nach diesem Motto, also nachdem. Und ich glaube, dass das *[A zeigt auf die Funktionsgleichung]* irgendwie heißt, dass zwei x sind, so dass das dann auf diesem Punkt liegen müsste [A *zeigt auf den Punkt (1/1) im Koordinatensystem]*, wo die Linie auch lang läuft.
	6	I	Okay. In der Schule habt ihr das ja oft so gemacht, dass ihr wahrscheinlich nur das *[I zeigt auf Funktionsgleichung]* bekommt und euch dann gesagt wird, zeichnet das doch mal, ne?
	7	A	Glaub schon.
	8	I	Versuch das mal, selber das zu machen.
	9	A	Ich würd- Ich würd`s halt glaub ich genauso zeichnen.
	10	I	Okay.

In Absatz 2 wird deutlich, dass auch Annika versucht ein ihr bekanntes Schema auf diese Aufgabenstellung zu übertragen. Es ist die gleiche Vorgehensweise wie bei Emma zu erkennen. Ihre Erklärung in Absatz 5 macht deutlich, dass sie ausschließlich das ihr bekannte Wissen auf diese Aufgabe überträgt. Es wird zwar anschließend versucht eine Erklärung zu finden, welche allerdings nur wenig Sinn ergibt. Um auch Annika eine Möglichkeit zu geben ihre Lösung zu korrigieren, wird sie gebeten die Funktion zu zeichnen, ohne das vorbereitete Koordinatensystem zu nutzen. Schließlich wäre es so möglich ihren eigenen Fehler bildbar zu machen. In Absatz 9 wird allerdings deutlich, dass sie ihren Fehler scheinbar nicht zu erkennen weiß, und das Arbeiten mit der Funktionsgleichung ihr demnach schwer zu fallen scheint.

Anschließend soll sich Annika eine Sachsituation zum gegebenen Funktionsgraphen vorstellen. Hierzu braucht sie die gegebene Funktionsgleichung nicht mehr zu berücksichtigen, da auch Annika scheinbar kein Verständnis zu dieser Repräsentationsebene aufgebaut hat.

Tabelle 16: Transkript 2 - Annika

Time-Code	Absatz	Person	Inhalt
4:28	11	I	Okay, ähm, dann `ne andere Sache. Kannst du dir dazu `ne Sachsituation vorstellen?
	12	A	--Ähm—so Sachsituation, wie so ne Sachaufgabe?
	13	I	Genau.
	14	A	Kann man das irgendwie- Jemand auf irgendeiner langen Straße läuft, und es die Straße dann so verläuft *[A fährt Koordinatensystem nach: positive x- und y-Achse]*. Und man dann irgendwie sagt, dass er so laufen muss *[A fährt erneut das Koordinatensystem nach]* und irgendwie so?
	15	I	Was meinst denn du genau, versuch das mal irgendwie mit ander- mal zu umschreiben.
5:06	16	A	Dass er, dass die Straße so verläuft wie dieses Koordinatensystem. Einmal in die Richtung *[A fährt positive x-Achse nach]*, und da kann man noch geradeaus laufen *[A fährt positive y-Achse nach]*.
	17	I	Mhm.
	18	A	Und da wohne ich *[A zeigt auf einen Punkt auf dem Graphen]*, und dann ist hier diese Seite die Straße. Man kommt halt nur so lang *[A geht x-Achse nach]*, und da gibt's keine Straßen. Und dass er dann irgendwie, dass er dann auf der Straße *[A zeigt auf x-Achse]* so und so 2 laufen muss, und dann 2 wieder nach da. Also 2 Meter, 20 Meter nach da [A *geht zur zwei auf der positiven x-Achse*] und dann 20 Meter nach da *[A zeigt auf den Graphen im Punkt (2/2)]*.
	19	I	Okay.

In *Tabelle 16: Transkript 2 – Annika* wird verdeutlicht, dass Annika keine Verbindung zwischen Inner- und Außermathematik herstellen kann. Schließlich versucht Annika das Koordinatensystem als „Landkarte" zu benutzen. Dies macht im Zusammenhang zu einem Funktionsgraphen jedoch nur wenig Sinn. Die Art und Weise, wie Annika in Absatz 14, 16 und 18 eine Sachsituation beschreibt wäre ausschließlich denkbar, wenn es sich um einen einzelnen Punkt handelt, der beschrieben werden soll. Sie deutet die Achsen des Koordinatensystems als eine Straßenkreuzung. Die Zahlen geben jeweils eine Entfernung an. Der Sachzusammenhang des kompletten Funktionsgraphen kann so allerdings nicht erfasst werden. Annika scheint allerdings dazu in der Lage zu sein, unrealistische Werte zu erkennen. Dies wird in ihrer Erklärung in Absatz 18 deutlich. Schließlich korrigiert sie hier ihre Werte von 2 auf 20 Meter. Obwohl Annika eingangs das Koordinatensystem beschreiben konnte, ist es ihr hier nicht möglich eine Verknüpfung zwischen graphischer und der sprachlich-situativen Darstellungsform zu schaffen.

Annika erhält eine weitere Möglichkeit das Koordinatensystem zu beschriften. Um ihr eine weitere Hilfestellung zu ermöglichen, erhält sie in diesem Zusammenhang direkt die Hilfskarten.

Tabelle 17: Transkript 3 - Annika

Time-Code	Absatz	Person	Inhalt
5:36	20	I	Das ist gar kein schlechter Ansatz, den du mir jetzt grade gesagt hast. Ich hätte das gerne nur nochmal gelöst, mit so Hilfskärtchen, die ich dir gebe okay?
	21	A	Okay.
	22	I	Und zwar stell dir mal vor, die x-Achse, das hast du ja gesagt, das ist die x-Achse *[I zeigt auf x-Achse und legt Hilfskarte daneben]*, das hast du hier ja auch gemacht *[I zeigt auf erstes Blatt]*
	23	A	Ja.
	24	I	Und das ist die y-Achse *[I legt zweite Hilfskarte an die y-Achse]*, ja? Ist ja immer so. Auf der x-Achse ist es die Zeit. Und auf der y-Achse ist es die Höhe, vom Gebäude zum Beispiel, ja? Kannst du dir jetzt `ne Sachsituation dazu vorstellen?
6:12	25	A	Dass der innerhalb einer bestimmten Zeit von Minuten in das, sagen wir mal, zweite Stockwerk fahren, hoch ist- Hochhaus kommen muss.
	26	I	Das ist schon mal ein sehr schöner Ansatz. Und jetzt hätte ich gerne, dass du dir nochmal überlegst wie du das beschriften würdest, anhand dieser Hilfskarte *[I gibt Hilfsaufgabe]* beziehungsweise dieser Aufgabenkarte. Ich bitte dich die einmal vorzulesen.
	27	A	Stell dir vor du befindest dich im Erdgeschoss eines Wohnhauses. Um deinen Freund zu besuchen musst du in die dritte Etage laufen. Pro Minute läufst du zwei Etagen. Wann bist du bei deinem Freund angekommen?
6:50	28	A	In Zwei ein halb Minuten
	29	I	Wie kommst du da drauf?
	30	A	Ne, ne, nicht, ne. Anderthalb Minuten.
	31	I	Wie kommst du da drauf?
	32	A	Weil ich ja ins dritte, in die dritte Etage muss. Und ich laufe pro Minute 2 Etagen, das heißt ich müsste vielleicht so, für jede eine Etage brauch ich dann so 30 Sekunden, also eine halbe Minute.
	33	I	Okay, und wenn das jetzt zu dem Graphen passen soll, wie würdest du das dann beschriften?
7:17	34	A	Ähm, -- das- Ja halt hier *[A zeigt auf die x-Achse]* eine Minute braucht, aber in, auf zwei Etagen.
	35	I	Okay. Wo würdest du dann was hinschreiben? - - Du hast hier die Zeit *[I*

			zeigt auf x-Achse], und du kannst ja jetzt einfach zum Beispiel mal festsetzen, irgendwo steht 1, auf der x-Achse. Mach das doch einfach mal.
	36	A	Wo finde ich die 1? *[A schreibt 1 an beliebigen Punkt auf der x-Achse]* Hier hin setzen.
	37	I	Okay, und was schreibst du dann, was hast du jetzt grade gesagt? Was da stand? Mit 2 irgendwas?
	38	A	Dass er in einer Minute zwei Etagen läuft.
	39	I	Okay, wo kommt dann jetzt \`ne 2 hin?
	40	A	Also erstmal auf \`ne y-Achse, würde die 2 kommen.
	41	I	Okay.
	42	A	Entweder hier, *[A zeigt auf die Stelle, an der sie die 2 später einträgt]*. Ja ich würde da sagen.
	43	I	Okay, dann mach das doch einfach mal.
	44	A	*[A beschriftet y-Achse mit 2]*
	45	I	Kannst du auf der Basis jetzt die Achsen beschriften?
	46	A	Ja.
	47	I	Dann mach das doch einfach mal.
	48	A	*[A beschriftet Achsen]*

In Absatz 25 wird klar, dass Annika nun eine Sachsituation finden kann. Zwar geht sie auch hier nicht auf die Steigung ein, jedoch kann dies damit zusammenhängen, dass sie kein Verständnis zu Funktionsgleichungen besitzt. Um Annika nun eine Gelegenheit zu bieten, die Achsen zu beschriften, erhält sie die erste Hilfsaufgabe, welche in Absatz 27 vorgelesen wird. Ohne die Achsen zu beschriften, löst Annika die Aufgabe. Zwar gibt sie erst die falsche Lösung an, jedoch korrigiert sie diese, durch die Erklärung ihres Vorgehens in Absatz 32. Demnach scheint Annika in der Lage zu sein funktionale Zusammenhänge einer Sachaufgabe zu verstehen, indem sie die notwendigen Informationen aus dem Text extrahiert und verarbeitet.

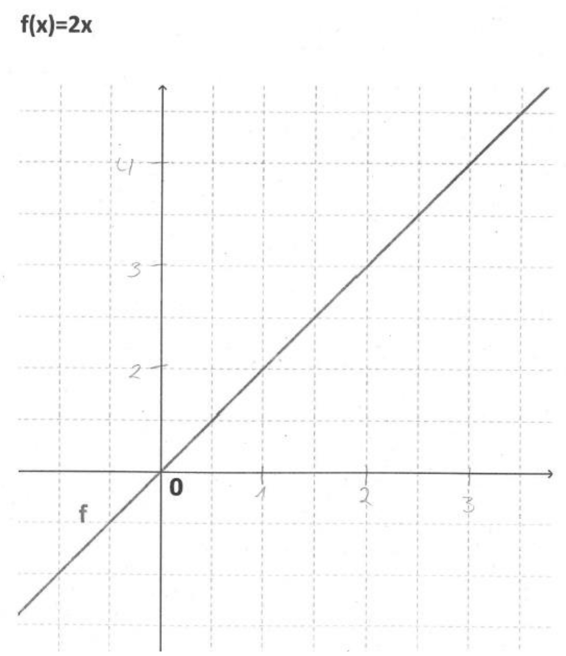

Abbildung 6: Lösung Testaufgabe 1 - Annika

Eine gegebene Sachsituation scheint Annika demnach keine Probleme zu bereiten. Da Annika mit der vorgegebenen Situation umzugehen weiß, soll sie anhand dessen die Achsen beschriften. Sie erhält den Tipp, dass sie eine Zahl festsetzen könnte. Durch verbale Hilfestellungen schafft es Annika anschließend die 2 an der richtigen Stelle zu platzieren, so wie es in der nebenstehenden Abbildung zu erkennen ist. Auf dieser Basis soll Annika nun die restlichen Werte beschriften. Auf der x-Achse gelingt ihr dies. Jedoch scheint sie Probleme bei der y-Achse zu haben. Zwar gab sie unter der Hilfestellung die zwei der y-Achse richtig an, fällt allerdings anschließend in das alte Muster, indem sie die Abstände missachtet. Zuvor fasste sie zwei Kästcheneinheiten als 2 zusammen. Nun wertet sie zwei Kästcheneinheiten als eine eins. Es wird in diesem

Absatz also klar, dass Annika in der Lage ist eine Lösung zu entwickeln, solange sie durch Kommentare unterstützt wird. Weitergehend schafft sie eine Lösung zu einer situativ sprachlich gegebenen Sachaufgabe zu entwickeln. Sie verknüpft dies allerdings nicht mit den anderen Darstellungsarten. Auch ein neues Muster zu entwickeln fällt Annika schwer, sowie man es in der Transkription und der Abbildung erkennen kann.

Daraufhin soll Annika den Sachzusammenhang des dritten Quadranten beschreiben. Hier begeht sie den Graph als Bild Fehler, da sie angibt dieser beschreibe den Sachzusammenhang beim Herunterlaufen. Weitergehende Reflexionen der Achsenbeschriftungen bleiben allerdings aus.

Annika erhält die zweite Testaufgabe. Wie auch zuvor soll sie die Abbildung beschreiben. In dieser Aufgabe scheint es Annika leichter zu fallen, auf die Eigenschaften des Graphens einzugehen. Schließlich überträgt sie die Aspekte der ersten Testaufgabe auf diese, sodass ihr auffällt, dass die Achsenbeschriftung fehlt. Als sie diese Beschriftung vornehmen soll begeht sie allerdings den gleichen Fehler wie auch zuvor, da sie sowohl die x-Achse als auch die y-Achse in Einserschritten beschriftet. Auch als sie sich eine Sachsituation zum Funktionsgraphen vorstellen soll, fällt ihr keine geeignete Situation ein. Demnach ist zu vermuten, dass Annika zwar dazu in der Lage ist eine gegebene Sachsituation nachzuempfinden; die Vorstellung einer eigenen Situation scheint ihr allerdings schwer zu fallen.

Wie auch bei der ersten Testaufgabe, erhält Annika das zweite Koordinatensystem erneut. Schließlich soll sie die Beschriftung nun unter der zur Hilfenahme der Beispielaufgabe lösen.

Tabelle 18: Transkript 4 - Annika

Time-Code	Absatz	Person	Inhalt
13:38	49	I	Kein Problem, dann gib ich dir das nochmal. *[I teilt erneut Testaufgabe 2 aus]* Alles kein Problem alles super. Dann dreh mal die Karte um *[A dreht Hilfskarte mit Stein Aufgabe um]*. Und lies die wieder vor.
	50	A	Ein Stein wird aus drei Metern Höhe fallen gelassen. Pro Sekunde fällt der Stein einen Meter. Gib an wann der Stein den Boden trifft. Auf welcher Höhe befindet sich der Stein nach einer Sekunde.
	51	I	Wie ich dir das vorhin schon gesagt hatte, beachte erstmal gar nicht das was hier so steht *[I deckt zweiten Quadranten ab]* ja? Was wäre denn jetzt die x-Achse, was wäre die y-Achse?
	52	A	Ich glaub die x-Achse wär - - *[Pause 8 Sekunden]* Die x-Achse wär die Anzahl von - - Sekunden.
	53	I	Okay.
	54	A	Und die y-Achse die von den…
14:30	55	I	…dann schreib dir…
	56	A	…Ach ne anders herum. Dass das die Meter wären *[A zeigt auf x-Achse]* und das die Sekunden *[A zeigt auf y-Achse]*.
	57	I	Wie kommst du jetzt da drauf?
	58	A	Keine Ahnung, erscheint mir irgendwie logischer.

	59	I	Okay, ähm, dein erster Gedankengang war der richtigere. Als dass das *[I zeigt auf x-Achse]* die Sekunden sind, das war schon richtig.
	60	A	Okay.
	61	I	Schreib dir das einfach mal dazu.
	62	A	Hier drauf?
	63	I	Jaja, klar. Darfst überall hinschreiben wo du willst.
	64	A	*[A Schreibt Sekunden an die x-Achse und Meter an die y-Achse]*
15:00	65	I	Okay, kannst du vielleicht anhand dieser Karte das jetzt beschriften?
	66	A	Ähm.- - *[Pause 8 Sekunden]* Wenn das jetzt eine Sekunde wär *[A zeigt auf einen Punkt auf der x-Achse]* und der Ball, von hier runter fällt.
	67	I	Mhm.
	68	A	Dann würde der ja einen Meter fallen. Das heißt immer so nach da runter *[A geht Graphen entlang]*, dann nach da.
	69	I	Okay. Von wo lässt du denn den Ball fallen?
	70	A	Von drei Meter Höhe, also wenn ich das in einer Schritten machen würde, dann so von hier *[A zeigt auf Schnittpunkt vom Graphen und der y-Achse]*.
	71	I	Okay, dann schreib das doch einfach mal dazu.
	72	A	*[A schreibt 3 an den Schnittpunkt und beschriftet y-Achse mit 1, 2, 3]*
	73	I	Kannst du, genau, das ist doch schon mal gut. Und jetzt möchtest, jetzt ist da ja diese ominöse Frage, ähm. Genau jetzt ist da ja eine Angabe gemacht. Welche Angabe ist da gemacht?
	74	A	Dass er aus drei Metern Höhe fällt und pro Sekunde ein Meter fällt.
16:11	75	I	Okay, wie kannst du jetzt die x-Achse beschriften?
	76	A	--Auch in - - *[Pause 10 Sekunden]* Auch in einer Schritten.
	77	I	Wie kommst du da drauf?
	78	A	Ja weil das, wenn der eine Sekunde fallen würde, also hier 3 Meter *[A zeigt auf y-Achsenabschnitt]* eine Sekunde dazu. Nein in zweier Schritten. Immer so *[A geht die Punkte (1/2), (2/1) nach]*.
	79	I	Wie kommst du da jetzt drauf?
	80	A	Weil`s ja immer den zweiten Punkt erreich muss hier, und das immer in Zweierschritten ist. Also so.
	81	I	Okay, dann beschrifte das doch einfach mal nach diesem Gedankengang.
	82	A	*[A beschriftet x-Achse]*
	83	I	Okay, ich nehm das mal hier weg *[I nimmt Abdeckung von zweiten Quadranten]*. Was könnte denn dieser Bereich *[I zeigt auf vierten Quadranten]* hier unten bedeuten. Beziehungsweise beantworte mir doch erstmal die Frage. Tut mir leid, das hatte ich vergessen.
	84	A	Nach einer Sekunde ist er auf 2 Metern Höhe.
	85	I	Okay, und das andere davor?
	86	A	Nach 3 Sekunden dann, dann trifft er den Boden.

In Absatz 52 und 56 wird klar, dass Annika Probleme damit zu haben scheint, die x- und y-Achse richtig zu identifizieren. Ihr wird die richtige Lösung verraten, um ein Weiterarbeiten zu ermöglichen. Anschließend werden gezielte Fragen gestellt, um Annika dazu anzuleiten die y-Achse zu beschriften. Hierzu nutzt sie die gegebenen Informationen aus der Beispielaufgabe. Sie überträgt die Höhe von drei Metern auf den Schnittpunkt des Graphens mit der y-Achse. Als sie nun die x-Achse beschriften soll fällt sie zunächst in ihr altes Muster zurück, da sie diese auch in Einserschritten beschriften möchte. Als sie allerdings eine Erklärung für ihr Vorgehen beschreiben soll, erkennt sie ihren Fehler (vgl. Absatz 78). Es wird also deutlich, dass Annika in der Lage ist die Aufgabe zu lösen, sofern sie eine Realsituation gegeben hat. Auch muss Annika Hilfestellungen erhalten um eine geeignete Lösung zu finden.

Fasst man abschließend die Ergebnisse von Annika zusammen, so fällt auf, dass sie zunächst versucht bekannte Strategien auf neue Aufgaben zu übertragen. In der Schule ist es für die üblich die x- und y-Achse symmetrisch zu beschriften, demnach passiert dies auch hier. Weitergehend besitzt Annika kein Verständnis zu algebraischen Darstellungsform, sodass auch keine Verknüpfung mit dieser Repräsentationsebene vollzogen werden kann. Annika ist dazu in der Lage, funktionale Sachzusammenhänge eines situativ-sprachlich gegebenen Sachverhalts zu verstehen. Eine Verknüpfung zur graphischen Darstellungsebene ist nur bedingt möglich. Dies geschieht nur durch verbale Hilfestellungen. Es ist also festzuhalten, dass Annika nur ein sehr geringes Verständnis zu linearen Funktionen besitzt.

4.1.5 Fazit

Innerhalb der Analysen wird deutlich, dass die Mädchen zunächst versuchen bekannte Strategien auf neue Aufgaben zu übertragen, indem sie die Achsenbeschriftungen in Einserschritten vornehmen. Weitergehend scheinen sowohl Emma, als auch Annika, Probleme mit der formal symbolischen Darstellungsebene zu haben. Dieses Phänomen ist allerdings auch bei Sören zu erkennen, welcher die Aufgaben ausschließlich durch den Taschenrechner lösen kann. Im Gegensatz zu Annika und Emma ist dieser jedoch dazu in der Lage die Achsenbeschriftung der ersten Testaufgabe ohne Hilfestellungen anzufertigen, indem er mittels des Taschenrechners eine Wertetabelle erstellt. Demnach ist festzuhalten, dass Sören eine Verknüpfung zwischen den Darstellungsformen herstellen kann. Julian hingegen, benötigt keine Hilfestellungen und löst die Aufgabe durch die Verknüpfung der Funktionsgleichung mit dem Funktionsgraphen. Prinzipiell scheint er allerdings zu wissen, wie Wertetabellen angefertigt werden, und welchen Sinn diese besitzen. Einzig Julian ist dazu in der Lage eine Alltagssituation zum gegebenen Funktionsgraphen herzustellen. Die anderen drei Lernenden benötigen hierzu die Tippkarten und Hilfestellungen in Form von verbalen Äußerungen. Als es darum geht die Beispielaufgaben zu lösen, sind alle Lernenden dazu fähig. Sören und Emma lösen diese auf Basis des Koordinatensystems, wohingegen Annika die notwendigen Informationen aus der Aufgabenstellung extrahiert. Julian kann beide Strategien nutzen. Eine weitere Auffälligkeit der Analyse ist es, dass die Jungen gegensätzlich zu den Mädchen in der Lage sind Fehler zu erkennen. Sie korrigieren unrealistische Annahmen und bemerken fehlerhafte Lösungen. Annika und Emma erkennen ihre Fehler nicht. Welche Auswirkungen diese Ergebnisse auf die formulierte Fragestellung haben, wird im nächsten Kapitel deutlich.

4.2 Hypothesenprüfung und Beantwortung der Fragestellung

Durch die dargestellte Datenauswertung der Interviews wird deutlich, dass es nun möglich ist die Fragestellung nach den Gründen geschlechtsspezifischer Leistungsdifferenzen zum Thema linearer Funktionen zu beantworten.

Betrachtet man zunächst die erste Hypothese (*Mädchen fällt es schwerer als Jungen zwischen den verschiedenen Darstellungsformen von linearen Funktionen zu wechseln*) so ist dies bedingt zutreffend. Julian ist dazu in der Lage zwischen allen vier Darstellungsformen zu wechseln. Auch Sören kann Wechsel zwischen der graphischen und der numerisch-tabellarischen Repräsentationsform durchführen. Auch ist es ihm möglich eine Verknüpfung zwischen der sprachlich-situativen und graphischen Darstellungsebene herzustellen, indem er Aufgaben gezielt über das Koordinatensystem löst. Diesen Wechsel können jedoch auch die Mädchen vollziehen, also ist diese Hypothese nur bedingt zutreffend, und ausschließlich bei Julian ist von einem tragfähigen Verständnis auszugehen.

Die zweite Hypothese, welche sich mit der Rekonstruktion einer außermathematischen Alltagssituation zu einem innermathematischen Sachverhalt beschäftigt, ist ähnlich zu beantworten wie die erste Hypothese. Grund hierfür ist es, dass ausschließlich Julian dazu in der Lage ist sich eine Alltagssituation vorzustellen. Die anderen Lernenden benötigen in diesem Kontext die Hilfskarten. Anzumerken ist hierbei auch, dass Sören in der zweiten Testaufgabe versucht, den Kontext der ersten Aufgabe zu übertragen. Des Weiteren ist diesbezüglich aufgefallen, dass es den Lernenden leichter fällt einen außermathematischen Kontext für den vierten Quadranten zu beschreiben als für den zweiten und dritten. Dies liegt insbesondere daran, dass die x-Achse mit der Zeit betitelt wurde, welche laut Aussagen der Lernenden nicht rückwärts laufen kann. Dies wird allerdings nur von Julian aufgegriffen, welcher seine Bedenken erklärt. Daraus lässt sich der Schluss ziehen, dass auch hier ausschließlich Julian eine Verknüpfung zwischen Inner- und Außermathematik herstellen kann. Da diese Hypothese allerdings stark mit der ersten in Verbindung steht, war dieses Ergebnis zu erwarten.

In der dritten Hypothese geht es um die Anzahl von Hilfestellungen. Eklatant ist es hier, dass sowohl Sören, als auch Annika und Emma Hilfskarten benötigen, um eine Alltagsituation zu rekonstruieren. Allerdings benötigen die Mädchen in der Summe mehr verbale Hilfestellungen durch den Interviewer. Schließlich ist Annika erst unter der zur Hilfegabe der Beispielaufgaben möglich eine Achsenbeschriftung vorzunehmen. Auch mündliche Anmerkungen müssen getätigt werden um ein (teilweise) richtiges Ergebnis zu erzielen. Demnach ist festzuhalten, dass die Mädchen mehr Hilfestellungen benötigen als die Jungen.

Berücksichtigt man abschließend die letzte Hypothese (*Mädchen übertragen typische Schemata aus dem Mathematikunterricht auf andere Aufgaben.)* so ist diese klar zu bejahen.

Schließlich ist klar aufgefallen, dass die Mädchen ein ihr bekanntes Schema auf die neuen Aufgabenstellung übertragen. Intuitiv werden die Achsen mit einer Schrittweite von eins beschriftet, ohne die Lösung zu reflektieren. Die Jungen hingegen versuchen einen Zusammenhang zwischen Funktionsgraph und Funktionsgleichung herzustellen. Demnach ist festzuhalten, dass Mädchen bekannte Strukturen auf neue Aufgabenstellungen übertragen.

Auf Basis der vorliegenden Hypothesenprüfung ist es nun möglich, die Frage nach den Leistungsdifferenzen von Jungen und Mädchen zum Thema lineare Funktionen zu beantworten. Die ersten beiden Hypothesen treffen zwar nur bedingt zu, jedoch ist eine Tendenz in Richtung eines Vorsprungs zugunsten der Jungen zu erkennen. Demnach kann man anmerken, dass die Leistungsunterschiede insbesondere auf ein fehlendes tragfähiges Verständnis der Mädchen zurückzuführen ist, da keine, oder nur wenige, Verknüpfungen zwischen den Darstellungsebenen und der Inner- und Außermathematik hergestellt werden könne. Darüber hinaus fällt auf, dass die Mädchen mehr Hilfestellungen benötigen, um Aufgaben zu verstehen und zu lösen. Eng verknüpft ist dieser Aspekt mit der Zeit, welche benötigt wird um Inhalte zu verinnerlichen. Benötigen Jungen weniger Hilfestellungen, können gleiche Aufgaben in einer schnelleren Zeit verstanden und gelöst werden. Demnach kann es daran liegen, dass Schülerinnen hinsichtlich linearer Funktionen benachteiligt sind, aufgrund der fehlenden Zeit zur Verinnerlichung von Inhalten. Auch muss während des Unterrichts von der Lehrkraft bedacht werden, notwendige Hilfestellungen zur Verfügung zu stellen. Ist dem nicht so, können Leistungsunterschiede genau aus diesem Grund auftreten. Die letzte Hypothese macht deutlich, dass Mädchen in einfacheren Strukturen denken. Wie auch im theoretischen Hintergrund beschrieben, sind Mädchen dazu in der Lage Wiederholungsaufgaben zu verstehen und zu lösen. Hier weicht die Vorgehensweise jedoch von der typischen Vorgehensweise des Schulunterrichts ab. Klar wird, dass Emma und Annika versuchen die Strukturen des Mathematikunterrichts (Koordinatensystem wird symmetrisch in Einserschritten beschriftet) der Schule auf die neue Aufgabe zu übertragen. Dies kann auch einen Grund für die Leistungsunterschiede darstellen. Schließlich werden in Klassenarbeiten, und auch im Unterricht, nicht ausschließlich reproduzierende Aufgaben des Anforderungsbereichs eins erfragt. Auch Aufgaben bei denen Verknüpfungen hergestellt werden müssen, oder neue Inhalte erschlossen werden müssen werden eingesetzt, bei denen die Mädchen scheinbar überfordert zu sein scheinen. Insbesondere bei solchen Aufgabentypen benötigen diese Hilfestellungen.

Zusammenfassend ist also festzustellen, dass mögliche Gründe für die Leistungsunterschiede ein fehlendes Verständnis darstellen können. Auch benötigen Mädchen mehr Unterstützung in Form von Hilfestellungen, da komplexe Strukturen von Mädchen nur schwer erfasst werden können. Zudem kann angemerkt werden, dass Jungen gegensätzlich zu Mädchen in der Lage sind unrealistische Annahmen zu reflektieren. Sie erkennen Fehler und versuchen diese zu korrigieren. Mädchen hingegen hinterfragen ihre Lösungswege nicht. Demnach kann auch das fehlende Verständnis zu realitätsbezogenen Annahmen ein Grund für die schwächeren Leistungen der Mädchen darstellen.

4.3 Begründung der Auswahl prägnanter Interviewpassagen

Im Verlauf der Interviews wurde deutlich, dass die Schülerinnen und Schüler teilweise gleiche oder ähnliche Probleme bei der Bearbeitung der Aufgabe haben. Demnach wurde versucht darauf zu achten, Passagen auszuwählen in denen die Schwierigkeiten übereinstimmen. Gleichzeitig wurde versucht gezielte Unterschiede aufzudecken. Schließlich ist es Ziel der Arbeit unterschiedliche Denkweisen von Jungen und Mädchen widerzuspiegeln. Des Weiteren ist es unabdingbar Abschnitte auszuwählen, in denen diese Unterschiede veranschaulicht werden. Außerdem wurden Passagen ausgewählt, in denen es um den Darstellungswechsel von linearen Funktionen geht. Grund hierfür ist, dass sich die erste Hypothese genau mit diesem Aspekt auseinandersetzt. Auch wurden Szenen gezielt zu den anderen Hypothesen ausgewählt, sodass eine Verbindung zum vorgestellten theoretischen Hintergrund hergestellt werden kann.

Innerhalb der einzelnen Interviews gibt es weitere Szenen, in denen sich Problembereiche zeigen. Insbesondere werden bereits ausgewählte Schwierigkeiten in ihren Gründen unterstützt, sodass auf Dopplungen verzichtet wurde, beziehungsweise nur in kurzen Zwischenabschnitten darauf eingegangen wurde.

4.4 Aussagekraft der Ergebnisse

Berücksichtigt man abschließend dieses Kapitels die Aussagekraft der Ergebnisse muss auf einige Grenzen und Schwierigkeiten der Datenerhebung eingegangen werden. Zum einen ist es schwierig Schülerinnen und Schüler zu vergleichen, die weder die gleiche Klasse noch die gleiche Schulform besuchen. Demnach hat Sören andere Voraussetzungen mitgebracht als die anderen Lernenden. Schließlich wurde dieser von einer anderen Lehrkraft, oder anderen Lehrkräften, unterrichtet als die Lernenden des Gymnasiums. Es wurde zwar versucht dies über die unterschiedlichen Jahrgänge auszugleichen, was jedoch keine Gleichheit in den Voraussetzungen widerspiegelt. Demnach sind die unterschiedlichen Klassenstufen und Schultypen als Störvariable zu definieren. Weitergehend wurde zwar versucht darauf zu achten, Schülerinnen und Schüler auszuwählen, welche ähnliche Mathematikleistungen erbringen, dies konnte jedoch nicht vollkommen gleich gehalten werden, also brachten die Lernenden auch hier geringfügig unterschiedliche Vorerfahrungen mit.

Auch die Einstellung zur Mathematik hat sich maßgeblich unterschieden. Während die Jungen auch nach den Interviews Interesse daran zeigten eine Rückmeldung zu ihren Bearbeitungen zu erhalten, interessierten sich die Mädchen hierzu nicht. Sören legte sogar Wert darauf, eine Erklärung zu erhalten, wie er die Aufgaben ohne den Taschenrechner lösen kann. Außerdem gaben die Jungen an Spaß am Fach zu haben, wohingegen eines der Mädchen angab andere Fächer klar zu bevorzugen. Folglich stellt die Einstellung zur Mathematik auch eine Grenze dar, welche in der Auswertung der Daten nicht berücksichtigt wurde.

Während der Interviews wurde versucht darauf zu achten, den Jungen und Mädchen ähnliche Fragen zu stellen. Aufgrund der Wahl des klinischen Interviews als Forschungsinstrument ist dies jedoch nicht vollends möglich. Resultierend daraus kann es an einigen Passagen der Interviews zu unbeabsichtigten Hinweisen gekommen sein, welche nicht bei jedem der Lernenden gleichgehalten werden konnte.

Weitergehend ist festzuhalten, dass die Stichprobe mit nur vier Schülerinnen und Schülern als eher klein angesehen werden kann. Um eine höhere Aussagekraft zu gewährleisten ist eine größere Anzahl an Teilnehmern unabdingbar. Demnach sollten die Ergebnisse nicht übergeneralisiert werden. Schließlich beziehen sich diese ausschließlich auf diese zwei Jungen und Mädchen, sodass nur Vermutungen angestellt werden können.

5. Schlussbemerkung

Im Endeffekt ist festzuhalten, dass es einige Vermutungen für die Gründe geschlechtsspezifischer Leistungsdifferenzen in Bezug auf die linearen Funktionen gibt. Zum einen scheinen Mädchen weniger Vernetzungen zwischen den Darstellungsebenen herstellen zu können, was dazu führt, dass kein tragfähiges Verständnis ausgebildet wird. Außerdem scheinen Mädchen mehr Hilfestellungen zu benötigen, um eine komplexe Aufgabe zu linearen Funktionen zu verstehen -und lösen zu können. Ein dritter Grund stellt den Umgang mit bekannten Strukturen dar. Jungen scheinen dazu in der Lage zu sein sich neue Strukturen zu erschließen. Mädchen hingegen fällt es schwerer. Die Asymmetrie von Koordinatensystemen stellt ein Beispiel solcher Aufgaben dar. Sollen Mädchen eine Achsenbeschriftung zu einem gegebenen Funktionsgraphen und einer gegebenen Funktionsgleichung anfertigen, wird die typische Struktur einer symmetrischen Beschriftung gewählt, da dies in Schulunterricht verlangt wird. Weitergehend scheinen Jungen geschulter darin zu sein, Fehler und realitätsferne Angaben zu lokalisieren.

Auf Basis dieser Ergebnisse ist es nun von Bedeutung gezieltes Material zu entwickeln, um die Mädchen bei der Ausbildung eines tragfähigen Verständnisses zu linearen Funktionen zu unterstützen. Eine Binnendifferenzierung im Unterricht sollte stets berücksichtigt werden. Dies kann in Form von Hilfskarten oder dem Einsatz von Methoden und Medien geschehen. Im Unterricht ist darauf zu achten, dass die Darstellungsebenen nicht getrennt voneinander betrachtet werden. Das Thema der linearen Funktionen kann schließlich auch durch einen handelnden oder entdeckenden Einstieg geschehen. Dadurch schaffen es die Lernenden eine Vorstellung aufzubauen. Ferner sollte immer thematisiert werden, welche Bedeutung lineare Funktionen im alltäglichen Leben haben. Schließlich lassen sich verschiedene Angebote gut über lineare Funktionen vergleichen. Der Einsatz des Taschenrechners sollte erst vollzogen werden, wenn ein grundlegendes Verständnis ausgebildet ist. Die Gefahr die hinter der Verwendung des Mediums steckt ist, dass die Lernenden ein Schema lernen, welches nicht verstanden wurde. Folglich fällt es den Schülerinnen und Schülern so schwer ein Verständnis aufzubauen.

Rückblickend betrachtet, habe ich durch die Auseinandersetzung mit der Thematik geschlechtsspezifischer Leistungsdifferenzen gelernt, dass bei der Planung von Unterricht stets auf die Binnendifferenzierung zu achten ist. Es sollte weitgehend berücksichtigt werden Hilfskarten anzufertigen, um leistungsschwache Lernende zu unterstützen. Schließlich ist es Aufgabe einer jeden Lehrkraft die Schülerinnen und Schüler zu unterstützen. Dabei muss auch das Interesse der Heranwachsenden geweckt werden. Ebenfalls habe ich durch die Durchführung der Interviews gelernt, den Schülerinnen und Schülern mehr Zeit zu geben. Grundsätzlich ist davon auszugehen, dass die Lernenden Zeit benötigen um ihre Gedanken zu systematisieren und das Wissen zu ordnen. Vor dieser Durchführung stellte die Einschätzung der Zeit zum Überlegen für mich ein Problem dar.

6. Literaturverzeichnis

[1] Bartsch, A.; Wedl, J. (2015): *Teaching Gender? – Zum reflektierten Umgang mit Geschlecht im Schulunterricht und der Lehrerausbildung*. Transcript Verlag. Berlin.

[2] Benölken, R. (2014): *Begabung, Geschlecht und Motivation- Erkenntnisse zur Bedeutung von Selbstkonzept, Attribution und Interesse als Bedingungsfaktoren für die Identifikation mathematischer Begabung*, in Journal für Mathematik-Didaktik. S. 129-158.

[3] Büchter, A.; Henn, H. W. (2010): *Elementare Analysis – Von der Anschauung zur Theorie*. Sprektrum Verlag. Heidelberg.

[4] Greefrath, G.; Oldenburg, R.; Siller, H.-S.; Ulm, V.; Weigand, H.-G. (2016): *Didaktik der Analysis – Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe.* Springer Spektrum Verlag. Berlin, Heidelberg.

[5] Holstermann, N.; Bögeholz, S. (2007): *Interesse von Jungen und Mädchen an naturwissenschaftlichen Themen am Ende der Sekundarstufe 1*, in: Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften.

[6] Hussy, W.; Schreier, M.; Echterhoff, G. (2013): *Forschungsmethoden – In Psychologie und Sozialwissenschaften*. Springer Verlag. Berlin. Heidelberg.

[7] Klieme, E.; Baumert, J.; Köller, O.; Bos, W. (2000): *Mathematische und naturwissenschaftliche Grundbildung : Konzeptuelle Grundlagen und die Erfassung und Skalierung von Kompetenzen*. In: Baumert, J.; Bos, W.; Lehmann, R. (Hrsg.): TIMSS/III. Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie. Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung. Am Ende der Schullaufbahn. Band 1. Opladen. S. 85-94.

[8] Klinger, M. (2018): *Funktionales Denken beim Übergang der Funktionslehre zur Analysis*. Springer Verlag. Wiesbaden.

[9] KMK (2004): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003*. Luchterhand. München.

[10] Martignon, L. (n.b.): *Mädchen und Mathematik. aufgerufen über*: https://www.ph-ludwigsburg.de/fileadmin/subsites/9f-intv-t-02/Maedchen_und_Mathe_01.pdf (am 26.07.2018)

[11] Nitsch, R. (2014): *Schülerfehler verstehen – typische Fehlermuster im funktionalen Denken*, in: Mathematik lehren. Heft 287. S. 8-11.

[12] Nitsch, R. (2015): *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge – Eine Studie zu typischen Fehlermustern bei Darstellungswechseln*. Springer Verlag. Wiesbaden.

[13] OECD (2016): *PISA 2012 Ergebnisse – Exzellenz und Chancengerechtigkeit in der Bildung*. Band 1. Bertelsmann Verlag. Deutschland.

[14] Reinders, H.; Ditton, H.; Gräsen, C.; Gniewasz, B. (2011): *Empirische Bildungsforschung – Strukturen und Methoden.* VS Verlag. Wiesbaden.

[15] Schroeders, U.; Pant, H. A.; Stanat, P.; Roppelt, A.; Siegle, T.; Pöhlmann, C. (2013): *IQB-Ländervergleich 2012 – Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen am Ender der Sekundarstufe 1.* Waxmann Verlag. Münster.

[16] Selter, C.; Spiegel, H. (1997): *Wie Kinder rechnen*. Klett. Leipzig. Stuttgart. Düsseldorf .S.100-109.

[17] Srock, B. (1989*): Mädchen und Mathematik – Historisch- systematische Untersuchung der unterschiedlichen Bedingungen des Mathematiklernens von Mädchen und Jungen.* Deutscher Universitäts-Verlag. Wiesbaden.

[18] Stöger, H.; Ziegler, A.; Heilemann, M. (2012): *Mädchen und Frauen in MINT – Bedingungen von Geschlechtsunterschieden und Interventionsmöglichkeiten*. LIT Verlag. Berlin.

[19] Waldis, M. (2012): *Interesse an Mathematik – Zum Einfluss des Unterrichts auf das Interesse von Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe 1*. Waxmann Verlag. Münster.

[20] Wartha, S.; Güse, M. (2009): *Zum Zusammenhang zwischen Grundvorstellungen zu Bruchzahlen und arithmetischen Grundwissen*, in: Journal für Mathematik, S. 256-280.

[21] Wendt, H.; Bos, W.; Selter, C.; Köller, O.; Schwippert, K.; Kasper, D. (2016): *TIMSS 2015 – Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich.* Waxmann Verlag. Münster.

7. Abbildungsverzeichnis

8. Tabellenverzeichnis

9. Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe erarbeitet und alle dabei genutzten Hilfsmittel (Literatur, Internetquellen,...) explizit angegeben habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß anderen Werken entnommen sind, sind in jedem Einzelfall unter genauer Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden. Für den Ausnahmefall, dass ich mich mit dem Themenfeld der Ausarbeitung bereits in einer anderen Lehrveranstaltung beschäftigt habe, habe ich eine hinreichende Abgrenzung mit der Dozentin / dem Dozenten der aktuellen Lehrveranstaltung abgesprochen und dies in dieser Ausarbeitung auch angemerkt.

____________________________ ________________________

(Ort, Datum) (Vanessa Gorski)

10. Anhang

Aus umwelttechnischen Gründen werden dieser Arbeit keine gedruckten Anhänge beigefügt. Alle Transkripte, Grobanalysen, verwendete Materialen sowie die Einverständniserklärungen der Schülerinnen und Schüler befinden sich im digitalen Anhang.