Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Wintersemester 2018/ 19

Produktives Üben mit Photomath:
Entwicklung einer Lernumgebung zum verständigen Üben quadratischer Gleichungen

Claudia Rickscherd
[redacted]

Erstprüfer: Dr. Marcel Klinger
[redacted]

Inhaltsverzeichnis

1. Vorwort

1.1. Darstellung des Aufbaus der Arbeit

Die vorliegende Arbeit setzt sich aus einem Theorieteil und einer empirischen Untersuchung zusammen, die am Ende der Arbeit wiederum analysiert und kritisch reflektiert wird.
Es wird zunächst die Ausgangssituation beschrieben und die Relevanz der Fragestellung erörtert. Zu Beginn des theoretischen Hintergrunds wird die Bedeutung des Übens für den Mathematikunterricht dargestellt. Dem schließen sich Erläuterungen zu verschiedenen Facetten des Übens an. Das Kapitel endet mit einem vorläufigen Fazit. Darauf folgt die Schilderung unterschiedlicher Ansätze zur Konzeption von Übungsaufgaben.
Danach wird die Behandlung quadratischer Gleichungen im Unterricht aufgegriffen, wobei auf benötigte Grundvorstellungen und häufige Fehlerquellen eingegangen wird. Im darauffolgenden Kapitel wird erläutert, wie sich Mathematik-Apps in den Unterricht integrieren lassen. Abgeschlossen wird der theoretische Komplex mit der Herleitung der Forschungsfrage in Bezug auf die zuvor dargelegte Theorie.

Der Abschnitt der empirischen Untersuchung beginnt mit der Darstellung des Forschungsdesigns im Sinne des Design-Based-Research Ansatzes. Dieses Kapitel unterteilt sich in die Vorstellung des angewandten Designs sowie der Lerngruppe. Die Entwicklung des Lehr-Lernarrangements und dessen Optimierungen werden ebenfalls geschildert. Daran schließen sich die Darstellung und Reflexion der Ergebnisse an, welche sich auf die ausgewerteten Fragebögen, die Lernumgebungen und die Beantwortung der Forschungsfrage beziehen. Abgeschlossen wird die Arbeit mit einem Fazit.

1.2. Beschreibung der Ausgangssituation und der Relevanz des Themas

Die Mathematik ist eine Schlüsseltechnologie in unserer Gesellschaft, ohne deren Wissen die meisten modernen technischen Anwendungen undenkbar wären. Doch Mathematik wird nicht nur von Mathematikern, Ingenieuren und Physikern für die Entwicklung künstlicher Intelligenz benötigt, sie findet tagtäglich in unserem Leben statt und nimmt dementsprechend auch einen wichtigen Bestandteil innerhalb des Schulunterrichts ein.

> *„Die Mathematik ist […] als Basisqualifikation gewissermaßen Teil der kulturellen Alphabetisierung. […] [Sie] erhält den Charakter eines grundlegenden Kulturwerkzeugs,*

> *dessen Beherrschung zur Voraussetzung einer verständigen und verantwortungsvollen Teilnahme am gesellschaftlichen Leben werde" (Klieme et al 2000: 85 f.).*

Wie KLIEME et al. ausführen, hat die Mathematik eine zentrale Rolle innerhalb unserer Kultur; sie trägt sogar maßgeblich dazu bei, erfolgreich am gesellschaftlichen Leben teilzunehmen. Diese Ausgangsposition bringt dementsprechend eine große Verantwortung und Herausforderung bei der Vermittlung dieser Wissenschaft an Heranwachsende mit sich. Das bedeutet, dass innerhalb des Mathematikunterrichts ein korrektes Bild der Mathematik als Wissenschaft und nicht nur als regelhafte Anwendung bestimmter Operationen aufgebaut werden muss. Geschieht dies nicht, verfügen die Schüler[1] nur über „Anwenderwissen" und sehen das Ziel oder den Zweck hinter ihren Handlungen nicht. Dieses Wissen können sie nur rezeptartig für die Reproduktion der gelernten Verfahren anwenden.

Innerhalb des aktuellen Mathematikunterrichts wird jedoch versucht, den Aufbau dieser Art von Wissen zu vermeiden. Die Prozesse, die bei der Verinnerlichung der Inhalte durchlaufen werden, bzw. das Verständnis von Lernen und Üben, wurden modernisiert. In den 70er Jahren des letzten Jahrhunderts wurde unter „Üben" beispielsweise noch ein Wiederholen von Handlungen verstanden, welches das Ziel hatte, eine „*fortschreitende Vervollkommnung und teilweis[e] Mechanisierung zu Fertigkeiten und Gewohnheiten"* (Klingberg 1974: 387) zu erreichen. Es stellte eine lästige Begleiterscheinung des Unterrichts dar, dessen Hauptaugenmerk auf das Erschließen neuer Inhalte gerichtet war (vgl. Bruder 2008: 4). 1984 forderte Heinrich Winter bereits eine Reformierung des Übens durch entdeckendes Üben bzw. übendes Entdecken (vgl. Winter 1984: 6).
Aktuell wird in der Didaktik nicht nur nach verschiedenen Phasen und Zielen des Lernens und Übens unterschieden, sondern auch die Ebenen, die bei den Schülern erreicht und aktiviert werden sollen, variieren (vgl. Leuders & Wittmann 2006: 3-7). Das Üben wird mittlerweile nicht mehr nur als eigenständiges Element des Unterrichts betrachtet, das ähnlich wie die Vertiefung und die Anwendung einen eigenen, abgetrennten und feststehenden Platz im Unterrichtsgeschehen einnimmt (vgl. Winter 1984: 4). Vielmehr überlappen die verschiedenen Phasen des Unterrichts immer stärker und es fixieren sich Begrifflichkeiten wie „*Üben und Anwenden*" oder „*Üben, Wiederholen, Vernetzen*" (Bruder 2008: 4). In diesen Konstellationen verfolgt das Üben den Zweck, neue und bereits

[1] Im fortlaufenden Text erfolgt die stellvertretende Verwendung des männlichen Geschlechtes ausschließlich aus Gründen der Lesbarkeit und Ökonomie. Alle anderen Geschlechter sind selbstverständlich inkludiert.

bekannte Begriffe, Zusammenhänge, Strategien und Verfahren in verschiedenen Kontexten sinnvoll zu verwenden (vgl. ebd.).

Doch nicht nur die Methoden und Abläufe, welche die Schüler bei der Wissensaneignung unterstützen sollen, haben sich verändert. Auch die klassischen Werkzeuge wie Stift und Papier werden im Rahmen der technischen Entwicklung beständig durch neuere, technisch weiterentwickelte Hilfsmittel ergänzt und ersetzt.
Galt zuerst der Taschenrechner als das Maß aller Dinge, wurde auch dieser bald durch schnellere, intelligentere oder grafikfähige Nachfolgermodelle ersetzt. Ähnliches hat auch der PC an Schulen erfahren müssen, der zunächst von Laptops, dann von Tablets verdrängt wurde (vgl. Welling 2017: 16). Angesichts aktueller Diskussionen um die Digitalisierung der Schulen rückt die Nutzung, aber auch die Nutzbarkeit der digitalen Hilfsmittel weiter in den Fokus der Didaktik (vgl. Ladel 2017: 301). Der gegenwärtige Zustand der Schulen erschwert eine Forschung, aber auch die Weiterentwicklung des Unterrichts bezüglich digitaler Werkzeuge. „*Die schulische Verbreitung von Tablets variiert erheblich. Laut ICIL-Studie konnten 2013 z.B. 6,5 Prozent der Schülerinnen und Schüler des 8. Jahrgangs in deutschen Schulen solche Geräte nutzen*“ (Welling 2017: 17). Dies mag zum einen an fehlenden finanziellen Mitteln, zum anderen an der fehlenden digitalen Infrastruktur der Schulen liegen. Die meisten Apps der Tablets benötigen einen Internetzugang, momentan ist jedoch nur an wenigen Schulen ein flächendeckendes bzw. ausreichend starkes WLAN-Netz vorhanden, um großen Schülerzahlen Zugang oder Nutzungsmöglichkeiten zu gewähren (vgl. ebd.). Da das Potential digitaler Medien für die Verbesserung von Lehr-Lernprozessen erkannt wurde (vgl. Barzel & Roth 2018: 16), ihre Integration aufgrund finanzieller Lücken aber schleppend erfolgt, rückt der Fokus vermehrt auf Mathe-Apps, die auf Smartphones genutzt werden können. PEGRUM erklärt beispielsweise, dass Schüler mittlerweile fast körperlich mit ihren Smartphones verschmolzen sind: „*Eine Aneignung mobiler Endgeräte, die mit einer Verleiblichung einhergeht*“ (2014: 3). Diese *Verleiblichung* kann für den Unterricht von Nutzen sein, da sich das digitale Werkzeug – das Smartphone – bereits im Besitz der Schüler befindet und dementsprechend keine Anschaffungskosten anfallen. Außerdem kennen sich die Schüler bereits mit der Nutzung des Smartphones aus und viele verfügbare Apps lassen sich fast intuitiv bedienen, womit der sichere Einsatz im Unterricht beschleunigt werden könnte.

I. Theoretischer Hintergrund

2. Relevanz des Übens für den Mathematikunterricht

„*Beim Lernen von Mathematik muss man üben. Das ist für Schülerinnen und Schüler, für Eltern und Lehrer unumstritten*“ (Bruder 2008: 4). Diese Aussage mag zwar für die meisten unumstritten sein, sie ändert allerdings nichts am schlechten Image des Übens, das häufig als „*stures Wiederholen immer wieder derselben Gegenstände*“(Winter 1984: 5) verstanden wird. Dementsprechend stiefmütterlich wurde das Üben über lange Zeit in der Didaktik und im Unterricht behandelt. Der Fokus lag bei den Einführungsstunden, langweilig und wenig vorzeigbar blieben die Übungsstunden (vgl. ebd.). Mittlerweile umfasst das Üben eine deutlich größere Spannweite an Methoden und Aktivitäten, die jedoch noch nicht flächendeckend in die Praxis gefunden haben. Teilweise verlaufen Übungsstunden noch nach einem altbekannten, wiederkehrenden Schema ab: Eine Aufgabe wird gemeinsam gelöst, die folgenden Aufgaben werden in Stillarbeit bzw. als Hausaufgabe bearbeitet (vgl. Leuders & Wittmann 2006: 1). Die Meinung der Schüler zu diesen Stunden bleibt zwiegespalten. Schwächere Schüler finden Bestätigung und Sicherheit beim Lösen gleicher Aufgaben, stärkere empfinden sie als langweilig (vgl. ebd.). „*Das Üben setzt [zwar] nicht zwangsläufig die Einsicht in den Gesamtzusammenhang voraus*“ (Bruder 2008: 4), je nach Qualität der Übungseinheit kann es aber dazu beitragen, den „*Sinn-, Sach- und Problemzusammenhang zu erschließen*“ (ebd.).
Unabhängig von der Ausgestaltung der Übungsstunde ist jedoch, dass Übungen unerlässlich für das Sichern und Vernetzen sowohl neuer als auch bekannter Inhalte sind (vgl. Wynands 2006: 113). Außerdem kann das Üben im Mathematikunterricht nicht nur auf dementsprechend deklarierte Übungsstunden beschränkt werden. Neue Inhalte bauen häufig auf bereits Bekanntem auf, sodass schon bei der Einführung des neuen Themas geübt und im Verlauf der Einheit durch Üben wiederum Neues entdeckt wird (vgl. Waasmaier 2016: 32).

Das Üben nimmt eine zentrale Position im Prozess des Verstehens und Begreifens der Mathematik ein, da es sich auf die gesamte Entwicklung der Wissenskonstruktion erstreckt. Es darf daher nicht nur auf begrenzte Zeiträume während des Unterrichts oder in die Hausaufgaben verschoben werden und kann, wie im folgenden Kapitel gezeigt wird, nicht nur auf die Aktivierung einer bestimmten Kognitionsebene reduziert werden.

3. Verschiedene Facetten des Übens

Nachdem festgehalten werden konnte, dass das Üben einen bedeutenden Platz innerhalb des Prozesses des Mathematikerlernens einnimmt, wird nun der Frage nachgegangen, welches Ziel durch das Üben verfolgt werden soll. Zunächst folgt eine allgemeine Darstellung, die sich anschließend in die Vorstellung verschiedener Facetten unterteilt. Begonnen wird diese Differenzierung mit dem Ziel des *Automatisierens*, daran schließen sich Erläuterungen der *Begriffsbildung und Begriffsintegration*, der *Konsolidierung und Flexibilisierung* sowie des *Transfers* an.

Diese Frage ist jedoch fast so alt wie die Schule selbst und ist auch heute noch nicht einstimmig zu beantworten. WYNANDS zitiert COMENIUS, der erklärt, dass der Unterricht und das Üben nicht der Tatsache Rechnung tragen, „*dass die Menschen vergesslich sind, vielmehr beim Lesen und Hören >Wasser mit dem Siebe< schöpfen*“ (2006: 113). Das Üben in der heutigen Zeit beschränkt sich nicht mehr nur auf das Lesen und Hören, Schüler werden in Übungssituationen durchaus selbst tätig. Dies werden sie jedoch auch in Unterrichtsstunden, wie sie im vorherigen Kapitel beschrieben wurden.

Daher muss bei der Eigentätigkeit der Schüler zwischen einem „*Lernen durch Belehrung*“ (Winter 1984: 5), einem Lernen durch Nachahmung oder einem „*Lernen durch gelenkte Entdeckung*“ (ebd.) unterschieden werden. Davon abgesehen ist es notwendig darüber nachzudenken, welche kognitiven Prozesse oder Ebenen durch das Üben angesprochen werden sollen.

Bei einem Blick in ältere – leider z.T. auch aktuelle – Mathematikbücher fällt auf, dass sie meist so aufgebaut sind, dass einer Einführung leichte Anwendungsaufgaben und abschließend Textaufgaben folgen. Die Anwendungsaufgaben orientieren sich an einer bestimmten Musteraufgabe oder Regel, die zu Beginn eingeführt wird. Innerhalb so genannter „grauer Päckchen“ oder „Plantagenaufgaben“ arbeiten die Schüler viele ähnlich aufgebaute Aufgaben, die sich isoliert mit einer Problematik beschäftigen und nur hinsichtlich ihres Schwierigkeitsgrades unterscheiden, ab (vgl. Wittmann 1990: 54).

Im Schulbuch *Maßstab 10 B* aus dem Jahre 2000 beispielsweise, stehen den Schülern innerhalb des Themas *Gleichungen* sieben Aufgaben mit insgesamt 54 Teilaufgaben zur Verfügung, um ihre Fertigkeiten im Auflösen von Klammern und dem Zusammenfassen der Ergebnisse zu schärfen (vgl. Schröder et al: 8f.). Was mit dieser Strategie bezweckt wird, ist unübersehbar: Die Schüler wenden ein und dasselbe Vorgehen immer wieder an, bis sie es verinnerlicht haben. Mit dieser automatisierten Technik können sie dann die schwereren Textaufgaben lösen, wobei sie das zuvor angewandte Schema rezeptartig weiterverwenden.

Dass die Schüler durch diesen Aufbau dazu angeleitet werden, Sicherheit bei der Durchführung bestimmter Verfahren zu erlangen, ist durchaus sinnvoll und nicht zu beanstanden.

Fraglich ist jedoch, ob diese Methode zielführend ist, um die Inhalte der Mathematik tatsächlich zu verstehen, um also ein tragfähiges Verständnis aufbauen zu können. Dieses setzt voraus, dass die einzelnen Unterrichtsinhalte miteinander verknüpft und in ein großes Ganzes eingeordnet werden können, was nur durch die Bildung von Grundvorstellungen zu den einzelnen Themenkomplexen möglich ist.

> „*Bei Grundvorstellungen ist nicht an eine Kollektion von stabilen und für allemal gültigen gedanklichen Werkzeugen zu denken, sondern an die Ausbildung eines Netzwerkes, das sich durch Erweiterung von alten und Zugewinn von neuen Vorstellungen zu einem immer leistungsfähigeren System mentaler mathematischer Modelle entwickelt*“ (vom Hofe 2003: 6).

Anzumerken ist jedoch, dass sich ein mathematischer Begriff, eine Regel oder ein Verfahren nicht nur durch eine Grundvorstellung, sondern durch mehrere begreifen lässt. Diese bleiben auch nicht fixiert über die gesamte Schullaufbahn bestehen, sie können durch Verknüpfungen zu anderen Themengebieten oder neuen Erfahrungen stets erweitert und verfestigt werden. Eine Vernetzung dieser verschiedenen Grundvorstellungen wird wiederum als Grundverständnis oder tragfähiges Verständnis bezeichnet (vgl. ebd.). Der Aufbau von Grundvorstellungen, insbesondere eines tragfähigen Verständnisses, ist jedoch kein „*Selbstläufer*“ (Vogel & Wittmann 2010: 1). Grundvorstellungen entwickeln sich nicht durch eine rein symbolische Darstellung oder Bearbeitung mathematischer Phänomene, vielmehr unterstützt die Verknüpfung verschiedener Darstellungsebenen (EIS-Prinzip, BRUNER 1971) ihre Entstehung. Das schematische Abarbeiten von Päckchenaufgaben trägt hingegen nicht dazu bei, Grundvorstellungen zu einem Thema aufzubauen (vgl. Vogel & Wittmann 2010: 6). Die häufige und erfolgreiche Anwendung einer Formel impliziert nämlich kein Verständnis. Erst die ganzheitliche Betrachtung eines mathematischen Gegenstands fordert die Schüler dazu heraus, ihn von einer anderen Seite oder Ebene bzw. durch eine „andere Brille“ zu studieren. Dieser Schritt ist mit neuen Bedeutungszuweisungen und Interpretationen verbunden, die dabei helfen können, ein besseres oder tiefgreifenderes Verständnis bei den Schülern aufzubauen (vgl. Leisen: 2004: 19).

Zielführender als das Päckchenrechnen verhält sich Üben, das sich beispielsweise am *Operativen Durcharbeiten* von AEBLI orientiert. Dabei handelt es sich um flexibles und sinnbezogenes Üben, das zur Vertiefung des Verständnisses beiträgt und dessen Ziel nicht vorrangig die Automatisierung ist: „*Das Ziel ist das vertiefte Verständnis, die bewegliche Operation, nicht der Automatismus*“ (Aebli 2006: 322). Dieses Üben orientiert sich an der Vorgehensweise, wie sie in manchen Schulbüchern noch gängig ist. Die Passage, „*erst wenn die gefundenen Strukturen aufgebaut und durchgearbeitet sind, sorgen wir für ihre [...] Automatisierung*“ (Aebli 2006: 248), verdeutlicht, dass ein sinnbezogenes und variables Üben andere kognitive Prozesse bei Schülern beeinflussen kann als das *Automatisieren*. LEUDERS & WITTMANN nennen neben dem Automatisieren als Ziele des Übens auch die *Begriffsbildung und Begriffsintegration*, die *Konsolidierung* und *Flexibilisierung* oder den *Transfer* zu bereits bekannten Themen (vgl. 2006: 4 ff.).

3.1. Automatisieren

Bevor näher auf die neu eingeführten Ziele eingegangen wird, muss jedoch verdeutlicht werden, dass auch das *Automatisieren* seine Berechtigung hat. LEUDERS & WITTMANN empfinden die Automatisierung beispielsweise als angemessen, wenn Schüler schnell über gewisse Fähigkeiten und Fertigkeiten verfügen sollen (vgl. 2006: 3). Des Weiteren haben verinnerlichte Prozesse eine entlastende Funktion auf die Schüler und schaffen gedankliche Beweglichkeit und Sicherheit (vgl. Leuders 2006: 94). Sie müssen über diese routinierten Verfahren nicht weiter nachdenken und können ihre geistigen Kapazitäten für „*Operationen in höhere[n] Zusammenhänge[n]*“ (Wynand 2006: 114) nutzen. Ein gutes Beispiel für die entlastende Funktion routinierter Rechenschritte ist die Anwendung des kleinen Einmaleins: Die Beherrschung des kleinen Einmaleins erleichtert den Schülern das Verstehen und Ausführen neuer Themen wie der Lösung von Gleichungssystemen. Sind die Schüler nicht sicher in der Verwendung des Einmaleins, hat dies Auswirkungen auf das Verständnis und die Berechnung der Gleichungen, weil ein großer Teil der mentalen Kapazitäten mit der Berechnung einfacher Multiplikationsaufgaben belastet wird. Während sichere Schüler sich auf die Herausforderungen konzentrieren können, die ein neues Thema ihnen bietet, müssen sich schwächere zusätzlich noch denen des Einmaleins stellen.

Trotzdem werden Schüler durch das Abarbeiten von Blockaufgaben nicht stärker, Üben kann nicht als „*Vorratslernen*“ oder „*Krafttraining*“ (Leuders 2010: 133) betrieben werden. LEUDERS merkt ebenfalls an, dass es wichtig ist, das Automatisieren von Fähigkeiten nicht in den Vordergrund zu stellen, sondern Begriffe und Verfahren in ihrer Bedeutung verstehen und reflektieren zu lernen (vgl. ebd.: 134). Außerdem besteht beim automatisierenden Üben immer die Gefahr, „*unter Ausschaltung des Denkens*" (Leuders 2006: 94) zu arbeiten, wenn immer nach einem bestimmten Verfahren vorgegangen wird. Dies kann zu einem unverstandenen Arbeiten in Routinen führen. Stattdessen sollten beim Automatisieren ebenfalls andere kognitive Prozesse – wie Reflektieren und Entdecken – bei den Schülern aktiviert werden.

3.2. Begriffsbildung und Begriffsintegration

Sollen für die Schüler Übungsaufgaben mit dem Ziel, ihre *Begriffsbildung und Begriffsintegration* zu fördern, zusammengestellt werden, reicht es nicht, sie einen Zusammenhang entdecken zu lassen oder eine Definition niederzuschreiben. Die Aufgaben müssen die Schüler dazu bewegen, den Begriff in verschiedenen Situationen einzusetzen, weitere Eigenschaften zu entdecken und die Grenzen des Begriffs zu anderen abzustecken (vgl. ebd.: 4). LEUDERS & WITTMANN erklären jedoch, dass das Ziel nicht darin liegt, die Begriffe und ihre zugehörigen Eigenschaften schlicht auswendig zu lernen. Deutlich gehaltvoller und effektiver ist das selbstständige Entdecken der Eigenschaften durch Experimentieren. In höheren Klassen ist ebenfalls die Einsicht, dass das Einordnen von Begriffen, in ein bestehendes Netz, stets nach bestimmten Kriterien und hierarchischen Aspekten geschieht, von enormer Bedeutung, um ein tragfähiges Verständnis zu den Begriffen aufzubauen (vgl. ebd. 5).

3.3. Konsolidierung und Flexibilisierung

LEUDERS & WITTMANN trennen die Übungsziele *Konsolidierung* und *Flexibilisierung*, da sie aber stark miteinander verwoben sind, werden sie hier in einem Kapitel vorgestellt. „*Erlernte Verfahren oder Begriffe müssen stabil und biegsam zugleich sein. Diese beiden Forderungen erscheinen zunächst widersprüchlich, jedoch ist neben der Konsolidierung deshalb auch die Flexibilisierung von großer Bedeutung*" (2006: 5).

Unter *Konsolidierung* wird eine Festigung bereits erworbener Kenntnisse verstanden. Dazu ist es notwendig, das Fundament, auf dem diese fußen, auszubauen. Dies kann mittels neuer Erfahrungen, die eine Erweiterung des Wissens herbeiführen, erreicht werden (vgl. ebd.). Dafür müssen die Schüler nicht unbedingt experimentell tätig werden, auch das Führen von Beweisen hilft, Erkenntnisse zu vertiefen oder eine neue Abstraktionsebene zu erreichen. Kennen Schüler beispielsweise die Formel für die Berechnung des Flächeninhalts eines Parallelogramms, können sie durch geeignete Veranschaulichungen dazu angeleitet werden, die Berechnung der Fläche eines Dreiecks abzuleiten (vgl. ebd.). Die *Konsolidierung* des Wissens kann ebenfalls durch eine Variation der Aufgabenstellung herausgebildet werden (vgl. Hansen 2010: 69). Möglichkeiten dazu bieten Aufgaben, die in einen anderen Kontext eingebettet sind oder einen veränderten Umfang an lebensweltlichen Informationen bzw. einen Modellierungs- oder Problemlöseanspruch beinhalten (vgl. Blum 2006: 26). Auch die Verallgemeinerung eines Problems, die Umkehr der Aufgabenstellung oder die Aufforderung zur Argumentation sowie zur Reflexion können die Schüler bei der Festigung ihrer Kenntnisse unterstützen (vgl. Drüke-Noe & Siller 2018: 7).

Nur, weil das Wissen der Schüler in bestimmten Bereichen gefestigt ist, geht dies nicht zwangsläufig mit einer variablen Anwendung einher. Das erworbene Wissen oder neue Fertigkeiten erscheinen häufig noch starr, als ob sie noch „*an den besonderen Beispielen klebten, an denen sie erarbeitet worden sind*“ (Aebli 2006: 310). Aus diesem Grund sollte die Festigung des Wissens immer mit seiner *Flexibilisierung* verknüpft werden. Denn je stärker das Fundament ist, auf dem Wissen aufbaut, desto flexibler kann es angewandt werden. Die *Flexibilisierung* eines Verfahrens schult nicht nur seine von expliziten Beispielen losgelöste Verwendung, sondern gleichzeitig auch wieder die *Konsolidierung* des Fundaments, auf dem es aufbaut (vgl. Leuders & Wittmann 2006: 6).

Der Begriff *Flexibilisierung* kann auch mit der Fähigkeit zur *Beweglichkeit des Denkens* nach AEBLI umschrieben werden. Diese setzt voraus, einen Sachzusammenhang aus einer anderen Perspektive betrachten zu können, d.h., einen beliebigen Punkt aus einem bestehenden Beziehungsnetz auszuwählen und aus dessen Perspektive verschiedene Zusammenhänge zu beleuchten (vgl. Aebli 2006: 317). Ein solches Vorgehen gelingt aber nur, wenn die Aufgabenstellungen variieren und nicht immer nach demselben Schema aufgebaut sind. Die Schüler müssen dazu angeleitet werden, Begriffe oder Verfahren mit allen verfügbaren geistigen Operationen zu üben (vgl. Leuders & Wittmann 2006: 6). Bei der Erstellung der Aufgaben kann beispielsweise darauf geachtet werden, auch Fragestellungen zu konzipieren, für die keine Lösung existiert (vgl. ebd.). Besonders effektiv, aber auch komplex, ist eine Umkehrung der Aufgabe, sodass die Schüler rückwärts arbeiten

müssen (vgl. Aebli 2006: 320). Im Normalfall ist eine Startsituation gegeben, wobei die Endsituation gesucht ist. Beim Rückwärtsarbeiten ist die Endsituation gegeben und die Schüler müssen versuchen, eine passende Startsituation zu finden.
Eine Kombination aus Konsolidierung und Flexibilisierung der Fähigkeiten ist essentiell, um „trägem Wissen" entgegenzuwirken. Darunter wird allgemein Wissen verstanden, das nicht spontan oder ohne Anregung von außen aktiviert werden kann. Liegt bei den Schülern nur dieses Wissen vor, beispielsweise durch alleiniges Automatisieren, findet kein Transfer zu bereits erarbeiteten Verfahren oder Begriffen statt (vgl. Hansen 2010: 69).

Es ist jedoch im schulischen Kontext zu beachten, dass dem flexiblen Anwenden von Wissen natürliche Grenzen gesetzt sind, denn dieses entwickelt sich mit dem Erfahrungsschatz der Schüler. Je umfassender dieser ist, desto besser können vorhandene Fertigkeiten und Fähigkeiten auf andere Situationen übertragen werden (vgl. Leuders & Wittmann 2006: 6). Verknüpfungen zu verschiedenen Anwendungsmöglichkeiten und Themengebieten, die für die Lehrkraft selbstverständlich sind, können von den meisten Schülern erst nach Jahren selbstständig nachvollzogen werden.

3.4. Transfer

Wie bereits unter Kapitel 3.3 angesprochen, ist ein Transfer zwischen neu erworbenem und bereits vorhandenem Wissen notwendig, um Fähigkeiten nachhaltig verankern und ausbauen zu können. Das heißt, dass Wissen, das in einem bestimmten Kontext erlernt wurde, in einen anderen übertragen werden kann (vgl. Uhden 2012: 24). Innerhalb des Transferbegriffs kann zwischen einem *bewussten* und einem *unbewussten Transfer* unterschieden werden.
Eine bewusste Transferleistung zeichnet sich dadurch aus, dass bestimmte Problemlöse- und Entscheidungsprozesse „*situationsanalysierend und reflexiv-abwägend auf den Kontext einer neuen Situation projiziert werden*" (Hansen 2010: 68). Unbewusst ist sie, wenn der Transfer automatisch, also ohne eine bewusste Steuerung angewandt wird (vgl. ebd.), wie es mit dem kleinen Einmaleins tagtäglich der Fall ist.
Das Transferieren in andere Wissensbereiche stellt das oberste Ziel des Übens dar, auf das alle anderen Ziele hinarbeiten. Ein reines „*Transferüben*" existiert jedoch nicht, weshalb während des gesamten Übungsprozesses wiederholt Möglichkeiten zum Transfer geboten werden sollten (vgl. Leuders & Wittmann 2006: 6). Da kein Begriff völlig losgelöst und isoliert von anderen existiert, erscheint es wenig sinnvoll, Neues nicht mit

bereits Bekanntem zu verknüpfen bzw. Begriffe nicht in ein bestehendes Begriffsnetz zu integrieren (vgl. Aebli 2006: 322). Gerade in der Mathematik bauen die meisten Unterrichtsthemen aufeinander auf oder kehren im Sinne des Spiralprinzips, in erweiterter Form, wieder zu den Schülern zurück. Sind Schüler dann jedoch nicht dazu fähig, Zusammenhänge zwischen den behandelten Themen zu erkennen oder Erweiterungen als solche zu identifizieren, erscheint ihnen die Mathematik als unübersichtlich und kompliziert. Aus diesem Grund sollte vermieden werden, Gegenstände, die mit einer Klassenarbeit überprüft wurden, als abgeschlossen zu betrachten. Sie sollten wieder in vermischte Übungen integriert oder ihre Verknüpfung gezielt zum Thema des Unterrichts gemacht werden.

3.5. Fazit

Das Automatisieren von Verfahren, wie es lange Zeit im Fokus des Mathematikübens stand, stellt mittlerweile nicht mehr das vorrangige Ziel dar. Mithilfe des alleinigen Widerholens wurde bei den Schülern lediglich träges Wissen aufgebaut, das allein in den behandelten Kontexten – im schlimmsten Fall nur während der jeweiligen Unterrichtseinheit – abgerufen werden kann und keine Verbindung zu anderen Kenntnissen eingeht. Nachdem ein neues Thema eingeführt wurde, sollten maßgebliche Begriffe ausgebildet bzw. in ein vorhandenes Netz integriert werden, worauf dann Maßnahmen zur Konsolidierung und Flexibilisierung folgen, wobei jegliche Übungen auf ein Transferieren in andere Lebens- bzw. mathematische Bereiche abzielen. Anzumerken ist allerdings, dass die Phasen des Lernens und Übens nicht trennscharf voneinander abzugrenzen sind (vgl. Winter 1984:6)

4. Ansätze zur Konzeption von Übungsaufgaben

Um die oben genannten Ziele des Übens zu erreichen, ist es essentiell, dass die Aufgabenstellungen dementsprechend konzipiert sind. Bestenfalls vereinen sie möglichst viele der Ziele in sich (siehe Kapitel 3.5.). Ein „Durchexerzieren“ möglichst vieler Aufgabentypen kann nicht nur anstrengend, sondern auch demotivierend sein.
Nachfolgend werden zuerst ausgesuchte Übungskonzepte vorgestellt, die im Anschluss durch thematische Ziele des Übens ergänzt werden.

4.1. Produktives, intelligentes oder entdeckendes Üben?

Dementsprechend zweckmäßig gestaltete Übungsaufgaben, sogenannte *produktive* Übungsaufgaben, festigen die Vorstellungen der Schüler und helfen, erlernte Verfahren und Begriffe zu reflektieren (vgl. Leuders 2010: 130). Ähnliche Ziele verfolgt das *intelligente* Üben, wobei sich die Begrifflichkeiten des *produktiven, intelligenten* bzw. *reflexiven* Übens in der Literatur häufig überlappen oder gleichwertig verwendet werden (vgl. Leuders 2010: 132). In dieser Arbeit werden die Konzepte gleichwertig ausgelegt und unter der Begrifflichkeit des produktiven Übens zusammengefasst.

LEUDERS & WITTMANN charakterisieren Üben als *produktiv,* wenn neue Kenntnisse erworben, in Sinneszusammenhängen gelernt und verschiedene Niveaustufen bedient werden bzw. die Schüler bewusst reflektieren (vgl. 2006: 2 f.). Es ist außerdem dadurch gekennzeichnet, dass es sinnstiftend, entdeckungsoffen, selbstdifferenzierend und reflexiv ist. Die einzelnen Eigenschaften werden nicht trennscharf behandelt und ein nahtloser Übergang bzw. eine gleichzeitige Integration ist durchaus erwünscht (vgl. ebd.: 134).

Als *sinnstiftend* kann eine Übung bezeichnet werden, wenn den Schülern das mit der Aufgabe verfolgte Ziel offenbart wird. Wenn sie verstehen, welche Fähigkeiten sie durch die Bearbeitung der Aufgaben stärken können oder welches Verständnis vertieft werden soll, kann das die Bereitschaft der Schüler erhöhen, die Übungsaufgaben konzentriert zu lösen (vgl. ebd.). Außerdem wird durch solche Informationen die Fähigkeit der Schüler unterstützt, Wissenslücken eigenständig zu beheben. Erhalten sie im Unterricht Auskunft darüber, welcher Aufgabentyp ein bestimmtes Wissen vertieft oder aufbaut, können sie diese zuhause auch selbstständig durcharbeiten.

Entdeckungsoffen ist eine Aufgabe, wenn sie den Schülern, wie der Name bereits vermuten lässt, Raum für Entdeckungen eröffnet. Das bedeutet, dass sie auch Wege einschlagen dürfen, die über das eigentliche Übungsziel hinausgehen und die Arbeit nicht nur auf das „*lineare Abarbeiten von vorgezeichneten Tätigkeiten beschränkt ist*“ (ebd.). Entdeckungsoffene Aufgaben regen im Sinne WINTERS zu einem Lernen durch gelenkte Entdeckungen an, da den Schülern Situationen geboten werden, die zum Fragen, Erkunden oder Nachdenken auffordern (vgl. 1984: 6).

Im Rahmen der Debatten um Inklusion und die Heterogenität der Schülerschaft, sollten *produktive* Übungsaufgaben *selbstdifferenzierend* gestaltet sein. Das heißt, dass die Aufgabenstellung so formuliert sein muss, dass sowohl starke als auch schwächere Schüler die Aufgabe bearbeiten und jeweils auf ihrem Niveau Nutzen aus den Aufgaben ziehen können (vgl. Leuders 2010: 134). Entgegen der weitverbreiteten Fehlvorstellung, dass

nur mit stärkeren Schülern anspruchsvolle Aufgabenstellungen geübt werden können, schlägt WAASMAIER vor, sich bei diesen Aufgaben auf das Verständnis der Aufgabenstellung zu fokussieren und es anzupassen. Durch diese Veränderung wird den Schülern der Einstieg in die Bearbeitung der Aufgaben erleichtert, wodurch auch mit schwächeren Schülern komplexe Probleme bearbeitet werden können (vgl. 2016: 33).
Letztlich sollten *produktive* Übungsaufgaben die Schüler zum Nachdenken anregen, also einen *reflexiven* Arbeitsauftrag beinhalten. Entweder reflektieren die Schüler über den Gegenstand der Aufgabe oder über ihre eigene Tätigkeit (vgl. Leuders 2010: 134). Das Nachdenken über den behandelten mathematischen Gegenstand hilft den Schülern, sich über die angewandten Operationen bewusst zu werden und ihr Verständnis aufzubauen oder zu vertiefen. Aufträge, die metakognitive Kompetenzen bei Schülern stärken, sind im Schulalltag noch nicht durchweg integriert (vgl. Sjuts 2018: 20). Die Fähigkeiten der Schüler werden in diesem Gebiet häufig überschätzt, das Reflektieren über das eigene Vorgehen oder Können teilweise als selbstverständlich vorausgesetzt (vgl. ebd.: 23). Dies mag daran liegen, dass es Erwachsenen meist nicht schwer fällt, ihr Vorgehen oder ihre Verständnisprobleme zu kommunizieren. Schüler hingegen können dies überwiegend noch nicht und müssen sich diese Fähigkeit erst erarbeiten. Auf die Frage, was ein Schüler an einer Aufgabenstellung nicht versteht oder wo sein Verständnisproblem bei einem neuen Thema genau lokalisiert ist, erhält man regelmäßig die Antwort: „weiß ich nicht. Alles!“[2]
Produktive Übungsaufgaben aktivieren die Schüler (meta-)kognitiv, indem sie zur Reflexion anregen und Lerngelegenheiten bieten, bei denen sich alle Schüler mit mathematischen Inhalten auf ihrem Niveau auseinandersetzen können, wodurch eigene Ideen und Konzepte der Schüler zugelassen werden. (vgl. Leuders & Holzäpfel 2011: 213).

Wichtig bei dem *Erwerb neuer Erkenntnisse* ist, dass keine Trennung zwischen Übungs- und Erarbeitungsphasen vorgenommen wird, sondern dass „*entdeckend geübt und übend entdeckt wird*“ (Winter 1984: 6 f.). Auch ein Lernen durch Belehrung (vgl. ebd.: 6) bzw. durch Imitation ist wenig zielführend. Die Schüler sollen selbstständig entdecken können, auch wenn diese Entdeckungen sich unter Umständen nicht mit der Stundenplanung des Lehrers decken.

[2] Eigene Erfahrung während verschiedener Praxisphasen.

Das *Lernen in Sinneszusammenhängen* soll den Horizont der Schüler erweitern, indem kein Training isolierter kleinerer Einheiten erfolgt (vgl. ebd.; siehe dazu auch Kapitel 3.2. und Kapitel 3.3.).

Selbstdifferenzierende Aufgaben beachten die Heterogenität der Schülerschaft und *bedienen verschiedene Niveaustufen*: je nach Kompetenz gelangen die Schüler zu unterschiedlichen Ergebnissen. Sie können jedoch an denselben Aufgaben arbeiten, wobei weder die stärkeren Schüler gelangweilt, noch die schwächeren überfordert werden (vgl. Leuders & Wittmann 2006: 2).

Letztlich lernen die Schüler durch *bewusstes Reflektieren*, ihren Lernprozess selbst zu steuern und können schrittweise immer mehr Eigenverantwortung für ihn übernehmen (vgl. ebd.: 3). Für eine bewusste Reflektion müssen Schüler keine Schriften verfassen, die Seiten füllen, sie sollen lediglich einen Anstoß in die richtige Richtung erhalten. Dieser kann auch während des Unterrichts erfolgen, indem die Schüler dazu aufgefordert werden, ihr Vorgehen oder ihre Lösung zu begründen oder zu erklären, unabhängig von ihrer Richtigkeit. Denn die Begründung der Schüler nimmt nicht mehr Zeit in Anspruch als eine ausführliche Korrektur, sie hat jedoch den Vorteil, dass die Schüler sich aktiv mit ihren eigenen Denkprozessen und Fehlern auseinandersetzen müssen. Dieses Vorgehen schult wiederum das mathematische Verständnis und behebt falsche Strategien nachhaltiger (vgl. Strecker 1999: 5).

Abschließend wird kurz das Prinzip des *Entdeckenden Lernens* nach WINTER dargestellt (vgl. 1984: 6 f.). Wie bereits beim produktiven Üben beschrieben, soll beim Entdecken geübt und beim Üben entdeckt werden, sodass sich die Phase, in der entdeckt werden darf und kann, nicht nur auf die Einstiegsstunde beschränkt.

> „*Üben ist in zweierlei Hinsicht dem entdeckenden Unterricht sogar inhärent: Einerseits stellen das Erkunden eines Feldes und das Suchen einer Lösung Formen der intensiven immanenten Wiederholung sowie der Reaktivierung und der Durchmusterung von Wissen dar. Umgekehrt haben Entdeckungen verfügbares Wissen und abrufbare Fertigkeiten zur Voraussetzung. Lernen ist immer Weiterlernen*“ (Winter 2016: 99).

WINTER versteht Lernen als „*Weiterlernen, Fortweben von schon Bestehendem, das Einfügen neuer Maschen in das Netz des Langzeitgedächtnisses*“ (Winter 1984.: 6), sodass durch das Üben nicht nur neue Erkenntnisse gewonnen werden, sondern auch vorhandenes Wissen aktiviert werden muss, um das neue langfristig abspeichern zu können.

Ebenso wie *intelligentes* oder *produktives* Üben, handelt es sich bei dem *entdeckenden Lernen* nicht um ein „*Wegwerf-Üben*“ bis zur nächsten Klassenarbeit (vgl. ebd. 11). Daher stellt es ebenso wie die anderen Konzepte, höhere Ansprüche an die Unterrichtsvorbereitung, wobei es schwierig ist, alle Punkte bei der Konzeption von Übungsaufgaben zu beachten (vgl. Waasmaier 2016: 32). Die Schüler sollen sich durch das Üben nämlich nicht nur träges Faktenwissen aneignen, sondern Wissen, das anschlussfähig ist und für lebenslanges Lernen eine Grundlage darstellt (vgl. ebd.: 7).

Wie gezeigt werden konnte, stehen hinter den Begriffen verschiedene Konzepte, die jedoch eine gemeinsame Vorstellung vom Lernen und Üben haben: Lernen ist ein aktiver Vorgang der Wissenskonstruktion und kein „Erwerb“ von Wissen (vgl. Jahnke 2017: 45), denn „*man lernt, indem man den zu lernenden Inhalt in sich nachkonstruiert*“ (Winter 1984: 5).

Die vorgestellten Konzepte haben das Ziel, Wissen begreifbar zu machen, zu entdecken, zu kommunizieren und unterschiedliche Stoffgebiete miteinander zu vernetzen (vgl. Wynand 2006: 114 f.). Trotzdem dürfen auch bei diesen Übungsformen das Automatisieren und Wiederholen nicht vergessen werden, da sie Sicherheit und gedankliche Beweglichkeit verschaffen, um „*neue Operationen in höhere Zusammenhänge*“ (ebd.) zu überführen. WINTER merkt außerdem an, dass ohne Wiederholung auch das Verstandene wieder vergessen wird (vgl. 1984: 7).

4.2. Ziele des Übens

Eine Orientierung an den verschiedenen Übungskonzepten oder Facetten allein reicht in der Praxis jedoch nicht aus, um geeignete Übungsaufgaben zu finden oder zu erstellen. Daher sollte die Frage gestellt werden, welche Fähigkeitsaspekte eines Themas durch die Übungen aufgebaut oder verfeinert werden sollen.

WINTER unterscheidet dabei zwischen der Schulung von Fertigkeiten, begrifflichem Wissen, Fähigkeiten und Haltungen bzw. Einstellungen (vgl. 1984: 8 ff.). Das Ziel des Übens ist die Verbesserung der einzelnen Aspekte. Diese kann sich beispielsweise in der geläufigeren Ausführung einer Fertigkeit, der klareren Anwendung von begrifflichem Wissen oder der erfolgreicheren Ausübung einer Fähigkeit, zeigen. LEUDERS teilt die verfolgten Ziele noch feiner ein, wobei sie sich teils mit der Einteilung WINTERS überschneiden. Hier wird in Kenntnisse, Fertigkeiten, Verstehen und Vorstellungen, Anwendungsfähigkeit, (übergreifende) Strategien, Reflexionsfähigkeit sowie Einstellungen differenziert.

Unter *Fertigkeiten* wird das Aneignen von Algorithmen oder halbalgorithmischen Strukturen verstanden, mit dem Ziel, sie fehlerlos anwenden zu können (vgl. Leuders 2009: 133). Dabei vergleicht WINTER die Anwendung von Algorithmen mit dem eines Rezeptes, wobei sich die Verwendung eines verinnerlichten Algorithmus auch als Murmelbahn visualisieren lässt: Je nach Voraussetzung, Gegebenheit oder Ergebnis wird ein entsprechender Weg eingeschlagen, der letztlich zum Ziel – der Lösung – führt. Die Schüler erlangen durch die verständige Anwendung eines Verfahrens Lösungssicherheit, die wiederum zu Entlastungen bei weiterführenden Problemstellungen führt. Fertigkeiten müssen dafür derart einverleibt werden, dass ihr Abruf nahezu automatisch erfolgen kann, wobei das Sinnverständnis des verwendeten Algorithmus nicht vernachlässigt werden darf (vgl. Winter 1984: 9).
Ein weiteres Ziel wäre das Vermitteln von *Kenntnissen* oder der Aufbau *begrifflichen Wissens*. Dabei kann unterschieden werden, ob die Schüler beispielsweise eine Definition verstehen, sie also in eigenen Worten wiedergeben können (vgl. Leuders 2009: 133) oder, ob diese verstandene Definition wiederum in ein Begriffsnetz integriert werden soll. WINTER legt bei der Vergrößerung des *begrifflichen Wissens* Wert auf die Vermehrung und Festigung der Verbindungen innerhalb eines wachsenden Begriffsnetzes (vgl. Winter 1984: 9). Ob die Schüler die Definition verstanden haben oder ihre Integration in das Begriffsnetz richtig ist, kann überprüft werden, indem die Schüler eigene Beispiele finden, die ihre *Vorstellungen* erläutern. Andernfalls können den Schülern auch Darstellungen oder beispielhafte Situationen vorgelegt werden, denen sie dann die entsprechenden Definitionen zuordnen (vgl. Leuders 2009: 133).

Wird mit dem Üben das Ziel verfolgt, *Fähigkeiten* bzw. *Anwendungsfähigkeiten* zu stärken, sollten die Schüler vor die Aufgabe gestellt werden, Probleme mit Hilfe des (Neu-) Erlernten in unbekannten Situationen zu lösen (vgl. ebd.). Obwohl LEUDERS angibt, dass die verschiedenen Übungsziele nicht stufenweise aufeinander aufbauen, müssen sich die Schüler bereits gewisse *Kenntnisse* und *Fertigkeiten* angeeignet haben, um ihre *Fähigkeiten* ausbauen zu können. Denn diese beruhen zu großen Teilen auf *Fertigkeiten* sowie Wissensbestandteilen und ihre Ausübung erfordert *„die flexible Koordination vieler unterschiedlicher Unterprogramme*“ (Winter 1984: 10). Der Aufbau von (*übergreifenden) Strategien*, der bei LEUDERS ein eigenständiges Übungsziel darstellt, wird von WINTER zu den *Fähigkeiten* gezählt (vgl. ebd.). Die Ausbildung der Strategien kann z.B. erfolgen, indem den Schülern Beispiele vorgelegt werden, an denen sie sich bei der Lösung in unbekannten Problemsituationen orientieren müssen (vgl. Leuders 2009: 133). Auch die

Reflexionsfähigkeit von Schülern kann gesondert fokussiert werden. Zum einen kann sich diese auf die Reflexion des eigenen Handelns, zum anderen aber auch auf die Wirksamkeit oder die Sinnhaftigkeit der Anwendung eines Verfahrens zur Lösungsfindung beziehen (vgl. ebd.).

Haltungen und *Einstellungen,* die die Bereitschaft der Schüler betreffen, sorgfältig und konzentriert zu arbeiten oder langwierige Lösungsbemühungen zu ertragen bzw. bei Problemen nicht direkt aufzugeben, können nicht durch einzelne Übungen erworben werden. Sie entstehen vielmehr aus Haltungen und Signalen, die innerhalb der Lehrer-Schüler-, aber auch der Schüler-Schüler-Kommunikation übermittelt werden. Auch wenn der Übungserfolg dieser Ziele am unsichersten ist, kann davon ausgegangen werden, dass sie ein Leben lang erhalten bleiben, sobald sie sich erst einmal aufgebaut haben (vgl. Winter 1984: 10 f.).

Übungen sollten immer unter neuen Gesichtspunkten und Zusammenhängen, aber auch an variierendem Material und Repräsentationen durchgeführt werden, um alle Ziele bei allen Schülern zu fördern. Des Weiteren muss bedacht werden, welche Grundvorstellungen die Schüler bereits aufgebaut haben können und welche es noch zu konstruieren gilt. „*Es genügt nicht, „gute" Aufgaben zu stellen - wichtig ist vielmehr auch, wie diese eingeleitet werden, wie die Schülerinnen und Schüler während der Bearbeitung betreut werden, ob und in welcher Form Lösungskontrollen stattfinden“* (Leuders & Wittmann 2006: 7).

5. Quadratische Gleichungen im Mathematikunterricht

Innerhalb dieses Kapitels soll zunächst geklärt werden, was im Allgemeinen unter quadratischen Gleichungen verstanden wird und welcher mathematischen Leitidee sie zuzuordnen sind. Anschließend wird sowohl auf zu erwerbende Grundvorstellungen als auch auf mögliche Schülerschwierigkeiten eingegangen.

Gleichungen durchdringen den gesamten Mathematikunterricht, spielen aber auch im alltäglichen Leben der Schüler eine bedeutende Rolle (vgl. Lehmann 2001: 5). Schon in der Grundschule operieren Schüler unbewusst mit Gleichungen, wenn sie beispielsweise gefragt werden, welche Zahl mit fünf addiert sieben ergibt. Algebraisch ausgedrückt, würde die Frage demnach lauten: $x + 5 = 7$, worauf die Gleichung nach x aufgelöst werden müsste. Fällt den meisten Schülern das Lösen einer solchen Gleichung noch leicht, empfinden sie bei quadratischen Gleichungen oft anders.

Eine quadratische Gleichung hat die Form $ax^2 + bx + c = 0$, wobei ax^2 das quadratische, bx das lineare und c das absolute Glied der Gleichung genannt wird. Eine quadratische Gleichung ohne lineares Glied heißt reinquadratisch, ansonsten wird sie als gemischtquadratisch bezeichnet.
Es wäre jedoch fatal anzunehmen, dass diese Definition oder Darstellung einer Gleichung als Basis für den verständigen Umgang mit Gleichungen ausreicht. Mathematisches Handeln wird vor allem durch intuitive Annahmen und Vorstellungen beeinflusst, die sich im Umfeld eines Begriffes entwickeln (vgl. vom Hofe et al. 2015: 161).
Sollte nun folgende gemischtquadratische Gleichung gelöst werden, $x^2 + 8x + 15 = 0$, würden einige Schüler ihr Vorgehen wahrscheinlich folgendermaßen beschreiben: „*Solange umformen, bis x links alleine steht und rechts nur noch Zahlen*!“ (Barzel & Holzäpfel 2011: 2). BARZEL & HOLZÄPFEL merken jedoch an, dass die Zuhilfenahme eines solchen Merksatzes bedenklich ist. Er wird oft nur bis zur nächsten Klassenarbeit verinnerlicht und gerät danach wieder in Vergessenheit, da eine solche Stütze von einem fehlenden Verständnis bezüglich Gleichungen und dem Prinzip des Umformens zeugt (vgl. ebd.). Um dieses aufbauen zu können, muss zunächst verstanden werden, bei welchen mathematischen Objekten es sich um Gleichungen handelt und wozu diese dienen. Damit ist wiederum der Aufbau gewisser Grundvorstellungen verbunden. „*Im angloamerikanischen Sprachbereich drückt sich dies im Gegensatz zwischen concept definition und concept image aus*“ (vom Hofe et al. 2015: 161).

5.1. Benötigte Grundvorstellungen

Wie bereits in Kapitel 3. kurz dargestellt, handelt es sich bei Grundvorstellungen um Bindeglieder zwischen realen Situationen und mathematischen Begriffen (vgl. Leuders & Bruder 2005: 5). Bereits der Name „Grund“-Vorstellung weist auf die grundlegende Bedeutung für die Aktivierung und Interpretation mathematischer Inhalte in realen Situationen hin (vgl. ebd.: 4).

> *„Grundvorstellungen beschreiben Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung. Sie charakterisieren insbesondere drei Aspekte dieses Phänomens: [die] Sinnkonstituierung eines Begriffs durch Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge, [den] Aufbau psychologischer Repräsentationen bzw. „Verinnerlichungen“, die operatives Handeln auf der*

> *Vorstellungsebene ermöglichen [und die] Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sinneszusammenhängen oder durch Modellieren des Sachproblems mit Hilfe der mathematischen Struktur"* (vom Hofe: 1994: 153).

Dabei wird innerhalb der Grundvorstellungen zwischen primären und sekundären unterschieden. Primäre Grundvorstellungen beschreiben die Schnittstelle zwischen realen Situationen und der Mathematik (vgl. Büchter & Henn 2010: 30). Sekundäre Grundvorstellungen bilden sich nach den primären aus und verknüpfen innermathematische Begriffe miteinander: *„Sekundäre Grundvorstellungen verbinden einen mathematischen Begriff mit bestehenden Vorstellungen und Darstellungen weiterer mathematischer Begriffe"* (Greefrath et al. 2016: 17). Grundvorstellungen müssen von den Schülern aktiv aufgebaut werden, wobei sie sich nicht trennscharf zueinander verhalten.

Sie können wiederum auf einzelnen Aspekten beruhen und in individuelle und globale Vorstellungen differenziert werden, worauf in dieser Arbeit aber nicht näher eingegangen wird. Ein Aspekt stellt einen Teilbereich eines mathematischen Begriffs dar, durch den dieser fachlich charakterisiert werden kann. Unter der Zahl acht kann sich beispielsweise eine Menge von acht Elementen (Murmeln, Würfeln, o.ä.) vorgestellt werden. Solche Gedanken beruhen in fachlicher Hinsicht auf dem Kardinalzahlaspekt der natürlichen Zahlen. Dieser ermöglicht es, die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge zu bestimmen und zu benennen. Mit Hilfe dieses Aspekts können Schüler Grundvorstellungen und ein tragfähiges Verständnis für natürliche Zahlen aufbauen. Einzelne, aber auch mehrere Aspekte können als Basis für verschiedene Grundvorstellungen fungieren (vgl. Greefrath et al.: 17 f.)

5.1.1. Der Gleichungsbegriff

Der richtige Gebrauch von Gleichungen setzt die Verknüpfung mehrerer Aspekte und Grundvorstellungen voraus.

Gleichungen setzen sich formal aus zwei gleichgesetzten Termen zusammen, die wiederum meist aus einer Kombination von Variablen und Konstanten (Zahlen) bestehen. „*Die Aussageform [einer Gleichung] kann durch Belegung der Variablen mit Werten in eine wahre oder falsche Aussage überführt werden*." (Barzel & Holzäpfel 2011: 2). Die Gleichheit bei Gleichungen ist dementsprechend nur gegeben, wenn ihr Ergebnis eine wahre Aussage beinhaltet. Gleichungen können in der Mathematik beispielsweise für die

Beschreibung mathematischer Objekte oder Zusammenhänge (z.B. Funktionen) verwendet werden oder, um sie als heuristische Mittel zu nutzen (vgl. ebd. 2 f.).
Das Aufstellen und Lösen von Gleichungen erfordert zunächst die Bedeutung des Gleichheitszeichens korrekt zu erfassen. Das Gleichheitszeichen wird „*vornehmlich als Handlungszeichen, als „ergibt“ verstanden*“ (Borromeo Ferri & Blum 2011: 127), was einer Aufforderung zum Rechnen – also zum Handeln – entspricht. Bei Gleichungen hingegen wird das Gleichheitszeichen als *Relationszeichen* verwendet, das verschiedene Ausdrücke in „*symmetrischer Weise in Beziehung setzt*“ (Prediger 2008: 91). Das Relationszeichen strukturiert die Gleichung bzw. die Terme und besagt, inwiefern sich bestimmte Teile eines Terms oder der Gleichung aufeinander beziehen (vgl. Rüede 2011: 712). Das Erkennen und Verstehen dieser Strukturierung nimmt eine zentrale Rolle bei der Vereinfachung von Termen und der Lösung mathematischer Gleichungen ein. Die Bedeutung einer Gleichung bzw. das Verständnis zu Gleichungen kann nur auf- und ausgebaut werden, wenn die Schüler verstehen, wie ein Term oder eine Gleichung gebraucht wird (vgl. ebd. 711 f.).

5.1.2. Der Variablenbegriff

Der Zugang zu Termen und Gleichungen ist eng mit der Vorstellung von Variablen verbunden. Mit Hilfe von Variablen können allgemeine, unbekannte oder veränderliche Zahlen dargestellt werden. Wie bereits beschrieben, werden Variablen und Konstante durch Operationen zu Denkeinheiten in Gleichungen zusammengefasst. „*Durch die symbolische Darstellung von Zahlen, Variablen und Zusammenhängen wird ein kontextunabhängiger und regelgeleiteter Zeichengebrauch ermöglicht.*“(Siebel 2004: 19).

Der verständige Gebrauch von Variablen fußt dabei auf verschiedene Grundvorstellungen und Aspekte, die miteinander verschränkt sind. Zunächst kann die Variable als *Platzhalter* verstanden werden, wenn sie anstelle einer zu ermittelnden Zahl steht und selbst keinen Bezug auf die Gleichung nimmt. Der Wert der Variable ist in diesem Fall so zu bestimmen, dass eine wahre Aussage entsteht: $5x + 3 = 13$ (vgl. Hefendehl-Hebeker & Rezat 2015: 127). Diese Variablenvorstellung wird auch durch den *Einsetzungsaspekt* beschrieben, da die Variablen als Platzhalter bzw. Leerstelle dienen und für sie beliebige Zahlen eingesetzt werden können (vgl. Büchter & Henn 2010: 33).
Variablen können ebenso als *Unbestimmte* auftreten, wie es bei der verallgemeinerten Form eines Rechengesetzes der Fall ist: $a^2 + b^2 = c^2$. Anstelle der Variablen können

beliebige Zahlen eingesetzt werden (vgl. ebd.). Mit dieser Vorstellung ist der *Gegenstandsaspekt* verbunden: Die Variable wird als „*Name für eine feste, noch unbekannte oder (noch) nicht genauer bestimmte Zahl betrachtet*“ (Bücher & Henn 2010: 32). Der *Gegenstandsaspekt* wird beispielsweise verwendet, wenn Skizzen von konkreten geometrischen Situationen angefertigt werden, wie bei der Berechnung der Höhe h eines Dreiecks (vgl. ebd.).
Dient eine Gleichung dazu, ein Objekt oder einen Zusammenhang zu beschreiben, kann eine Variable auch die Position einer *Veränderlichen* einnehmen. Diese Grundvorstellung wird bei allen funktionalen Zusammenhängen benötigt, die durch eine Gleichung beschrieben werden können. Wird eine Variable als *Veränderliche* verwendet, ist meist eine zweite von ihr abhängig, bei Funktionen meist *y* oder *f(x)*: $f(x) = ax^2$ (vgl. Barzel & Holzäpfel 2011: 4). Gerade bei der Zusammenfassung von Termen und der Umformung von Gleichungen tritt der *Kalkülaspekt* in den Vordergrund. Dieser besagt, dass es sich bei Variablen um Symbole handelt, mit denen nach gewissen Regeln operiert werden darf (vgl. Büchter & Henn 2010: 33).

Neben diesen Aspekten können Variablen noch in den *Einzelzahlaspekt* und in zwei *Bereichsaspekte* differenziert werden. Der Einzelzahlaspekt steht jeweils für eine Variable als feste Zahl, wie es beim Gegenstandsaspekt der Fall ist (vgl. ebd.).
Der *Bereichsaspekt* unterteilt sich in den *Simultanaspekt* und den *Veränderlichenaspekt*. Bei ersterem steht die Variable für einen bestimmten Zahlbereich, was beispielsweise bei der Formulierung von Rechengesetzen, wie dem Distributivgesetz, üblich ist: „ *Für alle reellen Zahlen gilt* $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$“ (ebd.: 34). Letzterer ist besonders für die Betrachtung funktionaler Zusammenhänge relevant. Die Variable wird als Veränderliche verstanden, indem sie Zahlen aus einem Bereich darstellt, welche sie nacheinander „*durchläuft*“ (ebd.).
Je nach Betrachtungswinkel der Gleichung oder der Variable, verändert sich auch der mit ihr verknüpfte Aspekt. Die Variablen ein und derselben Gleichung können durch verschiedene Aspekte beschrieben werden.

5.1.3. Funktionales Denken

Da mit quadratischen Gleichungen die Nullstellen quadratischer Funktionen bestimmt werden können, müssen Schüler für einen verständigen Umgang auch Grundvorstellungen zu Funktionen aufgebaut haben. Dabei ist zunächst der Begriff der *Funktion* von dem des *Funktionalen Zusammenhangs* abzugrenzen. Funktionale Zusammenhänge finden sich in außermathematischen Kontexten, die sich wiederum durch Funktionen beschreiben lassen. Beispielsweise besteht ein funktionaler Zusammenhang zwischen der Abkühltemperatur eines Tees und der verstrichenen Zeit, der wiederum als Exponentialfunktion beschrieben werden kann. Wird dann diese durch eine Funktion beschriebene Abhängigkeit von den Schülern bewusst erfasst und bei der Lösung von Aufgaben verwendet, spricht man von *funktionalem Denken* (vgl. Oehl 1970: 244).

Unter einer Funktion wird eine eindeutige „*Zuordnung der Elemente einer nicht-leeren Menge A zu den Elementen einer Menge B [verstanden]. Jedem Element x* $\in$ *A wird eindeutig ein Element y* $\in$ *B zugeordnet*" (Büchter & Henn 2010: 18). Durch das Auswendiglernen einer solchen Definition erhält jedoch kein Schüler eine Vorstellung davon, was er sich unter einer Funktion vorzustellen hat. Diese umfasst z.B. ein Verständnis der Terme und Gleichungen, von Kurven und der Idee einer eindeutigen Zuordnung. VOLLRATH (1989) beschreibt den Umgang mit Funktionen durch die Aspekte der eindeutigen *Zuordnung*, der *Kovariation* und der *Funktion als Ganzes* bzw. als Objekt (vgl. vom Hofe et al. 2015: 161).

Der *Zuordnungsaspekt* wird eigentlich schon durch die Definition beschrieben. Jedem Wert einer Größe wird genau ein Wert einer anderen Größe zugeordnet. Auf das Beispiel einer quadratischen Funktion angewendet, bedeutet dies, dass jeder reellen Zahl ihr Quadrat zugeordnet wird: $x \mapsto x^2$. Steht das *x* für eine positive Zahl, kann der Zusammenhang auch geometrisch betrachtet werden, was das Verständnis erhöht. Der Seitenlänge *x* eines Quadrates wird der Flächeninhalt x^2 des Quadrats zugeordnet (vgl. Greefrath et al. 2016: 47 f.). Bei dieser Sichtweise handelt es sich um eine punktuelle und statische Betrachtung einzelner Wertepaare, die aus einem Graphen oder einer Tabelle ablesbar sind (vgl. Vogel & Wittmann 2010: 6).

Der *Kovariationsaspekt* betrachtet die Funktion dynamisch. Jede Veränderung von x zieht eine Veränderung der Funktion, dem *f(x)* nach sich, es wird die gleichzeitige Veränderung von Argument und Funktionswert betrachtet. Der *Kovariationsaspekt* untersucht einen bestimmten Bereich der Funktion bzw. Abschnitte eines Graphen (vgl. ebd.). Eine Fragestellung, die den Kovariationsaspekt einer Funktion fokussiert, ist „*wie verändert sich der Flächeninhalt eines Quadrats, wenn man die Seitenlänge variiert?*" (Greefrath et al 2016: 48).

Bei dem letzten Aspekt, der eine *Funktion als Ganzes* wahrnimmt, wird ein gegebener oder erzeugter Zusammenhang vollständig betrachtet. Es werden nicht nur lokale Ausschnitte des Graphen, sondern der gesamte Funktionsverlauf, beispielsweise als Sinuskurve bei der Gezeitenabfolge, studiert (vgl. Leuders & Bruder 2005: 3). Da die Funktion als Ganzes bzw. als Objekt gesehen wird, können ihr Eigenschaften wie Nullstellen, Extrema oder Symmetrie zugesprochen werden (vgl. Greefrath et al. 2016: 49).

Es ist jedoch zu beachten, dass sich die Denkweisen und Vorstellungen der Schüler durchaus von den vorgestellten unterscheiden, weshalb diese im Unterricht explizit geäußert und thematisiert werden sollten, um dem Aufbau von Fehlvorstellungen vorzubeugen (vgl. Leuders & Bruder 2005: 4). Aus diesem Grund sollte versucht werden, bei den Schülern möglichst vielfältige Grundvorstellungen aufzubauen und diese miteinander zu verknüpfen. Besonders empfehlenswert ist es, den Schülern möglichst früh Gelegenheiten für das Erfahren von Abhängigkeiten und Kovariationen zu bieten und Funktionen als „*Beschreibungsmittel für reale Zusammenhänge erfahrbar [zu] machen*" (ebd.: 7). Besonders wichtig ist es dabei im Sinne des EIS-Prinzips von BRUNER (1971), verschiedene Darstellungsformen zu nutzen und die Schüler enaktiv, ikonisch und symbolisch an den Funktionsbegriff heranzuführen und ihnen die verschiedenen „Gesichter" der Funktionen begreiflich zu machen. Dies kann durch verbale Beschreibungen, in numerischer Tabellenform, als graphische Betrachtung von Diagrammen und Graphen sowie rein symbolisch als zusammengesetzten Ausdruck aus Variablen und Zahlen, geschehen (vgl. Leuders & Bruder 2005: 4). Mit Hilfe dieses Vorgehens lernen die Schüler, dass Funktionen unterschiedlich dargestellt werden können und dass die Betrachtung aus verschiedenen Perspektiven dem Lösen von Problemen zuträglich sein kann (vgl. Hußmann & Laakmann, 2011: 2 f.).

Der verständige Umgang bzw. der Umfang des funktionalen Denkens *„zeigt sich an der Fähigkeit in unterschiedlichen Darstellungen von Funktionen, das Ganze der Funktion zu erfassen und in der Fähigkeit, vom Einzelnen aufs Ganze und umgekehrt vom Ganzen aufs Einzelne umzuschalten*" (Vollrath 1989: 17).

5.2. Häufige Fehlerquellen

Neben korrekt aufgebauten Grundvorstellungen, wie sie im vorherigen Abschnitt dargelegt wurden, können natürlich auch Fehlvorstellungen oder unzureichend ausgebildete und mentale Muster konstruiert werden (vgl. Vom Hofe et al. 2015: 161).

Im Bereich des funktionalen Denkens haben Schüler häufig Schwierigkeiten, eine reale Situation in eine Gleichung oder einen Term zu übersetzen und umgekehrt. Ebenso häufig ist der Graph-als-Bild-Fehler bei Schülern zu beobachten, bei dem sie den Funktionsgraphen als reelles Bild interpretieren (vgl. Vogel & Wittmann 2010: 1). Wird das Fahrverhalten auf einer Rennstrecke beispielsweise durch eine Funktion graphisch realisiert, schaffen es einige Schüler nicht, eine entsprechende Strecke zuzuordnen.

Aber auch das Aufstellen von Gleichungen zu gegebenen Graphen bereitet den Schülern Probleme, da der Aufbau einer solchen Gleichung für sie unverstanden bleibt (vgl. Nitsch 2014: 8 ff.).
Problematisch ist weiterhin, dass Schülern der Zusammenhang zwischen quadratischen Funktionen und quadratischen Gleichungen oft nicht bewusst ist. In Mathematikbüchern werden sie oftmals als getrennte Themen behandelt, weshalb Schüler auf Wissen, das sie zu Funktionen aufgebaut haben, bei quadratischen Gleichungen nicht zurückgreifen. Der Transfer zwischen diesen Teilgebieten gelingt ihnen häufig nicht. *„Schülerinnen und Schüler scheinen quadratische Gleichungen und quadratische Funktionen nicht miteinander in Verbindung zu bringen […]. Sie wechseln nicht flexibel zwischen entsprechenden äquivalenten Problemen*“ (Klinger 2018: 368).
Ebenso bietet das Variablenverständnis der Schüler ein großes Potential für Fehler, wobei HEFENDEHL-HEBEKER & REZAT die größte Hürde beim Übergang zum Veränderlichenaspekt sehen (vgl. 2015: 135 f.).

Davon abgesehen bereitet den Schülern das Umformen und Verstehen von Gleichungen ebenfalls Schwierigkeiten. Wie bereits beschrieben, können schon zum Begriff des Gleichheitszeichens verschiedene Grundvorstellungen aufgebaut werden (vgl. Kapitel 5.1.1.). Sind diese nicht korrekt oder vollständig ausgebildet, können erste Fehler auftreten (vgl. Barzel & Holzäpfel 2011: 3). Bei der Umformung kann, entgegen der Gleichheit, eine Operation nur auf einer Seite der Gleichung durchgeführt werden (vgl. Eigel 2011: 46). Andernfalls können auch Probleme bezogen auf das Verständnis auftreten, indem die Grundidee von Gleichungen nicht abgerufen wird. Die häufigsten Fehler auf syntaktischer Ebene entstehen dadurch, dass die Struktur der Terme nicht richtig erkannt und

dementsprechend eine falsche Gegenoperation gewählt wird (vgl. Barzel & Holzäpfel 2011: 5). Schüler subtrahieren in diesen Fällen z.B. anstatt zu dividieren.
Falsche Lösungen können ebenfalls aus Rechenfehlern resultieren. Dazu zählen beispielsweise Vorzeichenfehler, systematisches Verrechnen – wie das Nichtbeachten von Klammern – oder ein fehlerhafter Umgang mit Variablen: $3x - 3 = 3$. Bei solchen Fehlern sollte bei der Suche nach der Fehlerursache trotzdem immer überprüft werden, ob es sich um systematische oder um Flüchtigkeitsfehler handelt (vgl. Eigel 2011: 48).
BARZEL & HOLZÄPFEL konnten außerdem feststellen, dass selbst erfolgreiche Schüler bei der Umformung von Gleichungen auf bekannte arithmetische Strukturen zurückgreifen und algebraische häufig nicht wahrnehmen, was wiederum zu Fehlern oder ungelösten Gleichungen führt (vgl. 2011: 4).

Eine weitere Hürde beim Lösen quadratischer Gleichungen tritt bei der quadratischen Ergänzung auf. Hier müssen die Schüler ihr Wissen über binomische Formeln reaktivieren, was ihnen teilweise nicht gelingt. Schüler übergeneralisieren Schemata, was zu unzulässigen Termstrukturen führen kann. Folgende Umformung stellt dabei keine Seltenheit dar $(a + b)^2 = a^2 + b^2\ statt\ (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (vgl. Strecker 1999: 2 f.). Umgekehrt können Terme als Binom aufgefasst werden, obwohl sie keine sind. Auch das Radizieren der Gleichung, um eine Lösung für die gesuchte Variable zu erhalten, verleitet zu Unachtsamkeiten oder systematischen Fehlern. MALLE führt solche fehlerhaften Strategien unter dem Begriff des *unzulässigen Linearisierens*, eines Spezialfalls des Übergeneralisierens, ein. Unter Linearisieren wird Folgendes verstanden: „*Soll auf einen Ausdruck eine algebraische Operation angewandt werden, so wird dieser Ausdruck in Teile zerlegt und die Operation der Reihe nach auf die einzelnen Teile angewandt*“ (Malle 1993: 175). So werden allgemeine Linearisierungsschemata, wie sie durch folgende Operationen gebildet werden können $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, unkritisch auf andere Verknüpfungen projiziert $\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Der verständige Umgang mit quadratischen Gleichungen stützt sich auf eine Vielzahl von Grundvorstellungen und Aspekten, deren Nichtverstehen ein erhöhtes Fehlerpotential birgt. Aber auch im Bereich der reinen Rechenschritte geschehen häufig Unachtsamkeiten, wobei es auch am Verständnis der anzuwendenden Schemata mangeln kann.

6. Mathematik-Apps im Unterricht

Im Vorwort wurde die Entwicklung der medialen Unterstützung des Unterrichts und die damit verbundenen Probleme bereits kurz geschildert. Der Kernlehrplan für Gesamtschulen in NRW sieht vor, dass Schüler am Ende der Sekundarstufe I gewisse Kompetenzen im Umgang mit Werkzeugen und Medien im Mathematikunterricht vorweisen können. Das bedeutet, dass sie klassische mathematische sowie elektronische Werkzeuge und Medien situationsangemessen verwenden können. Sie nutzen in diesem Sinne Bücher und das Internet, um sich Informationen zu beschaffen, aber auch Taschenrechner, Funktionsplotter, Tabellenkalkulationen und Geometriesoftware (vgl. Kernlehrplan 2004: 15).

Medien sollen die Schüler dabei unterstützen, abstrakte mathematische Objekte besser zu verstehen und den Aufbau von Grundvorstellungen voranzutreiben (vgl. Schmidt-Thieme & Weigand 2015: 461). Mit Funktionsplottern lassen sich z.B. Vorstellungen von Funktionen und ihrer einzelnen Parameter vertiefen, indem der Plotter Funktionen innerhalb eines beliebigen Intervalls zeichnet. Auch mit Digitaler-Geometrie-Software (DGS) wie *GeoGebra* lassen sich Operationen besonders anschaulich darstellen, die in der Realität sehr aufwändig oder im Unterricht nicht durchführbar wären. Neben der Möglichkeit zur Konstruktion geometrischer Objekte, stellt sie auch die algebraische Schnittstelle zur Verfügung, mit der Funktionen und Figuren verändert werden können. Ein weiterer Vorteil in der Verwendung digitaler Werkzeuge liegt also auch darin, dass *„nun die vielen notwendigen, aber stumpfsinnigen Rechnungen vermieden werden können*“ (Lehmann 2001: 5). Des Weiteren dient die Auseinandersetzung mit verschiedenen Medien dazu, die Medienkompetenz der Schüler zu verbessern, um sie auf ein Leben in einer stark digitalisierten Gesellschaft vorzubereiten.

Neben Computern gilt mittlerweile auch die Verwendung von CAS-Taschenrechnern als unterrichtlicher Standard. CAS steht in diesem Zusammenhang für Computer-Algebra-System. Mit CAS-Rechnern lassen sich Rechenaufgaben numerisch-graphisch oder symbolisch lösen. Durch die erstere Darstellungsmöglichkeit heben sich CAS nicht von normalen Funktionsplottern ab. Sie ermöglichen jedoch auch ein Arbeiten mit symbolischen Ausdrücken wie Variablen, Funktionen und Matrizen. (vgl. Hischer 2002: 262 ff.). Die Anschaffungskosten für CAS-Taschenrechner sind jedoch hoch, weshalb sie an vielen Schulen erst in der Oberstufe eingesetzt werden. Funktionen und Gleichungen werden hingegen schon in der gesamten Sekundarstufe I im Unterricht behandelt. Außerdem gestaltet sich das Berechnen von Lösungen nicht so intuitiv wie mit einem normalen Taschenrechner. Eingabehilfen müssen bewusst genutzt werden, so wird beispielsweise ein Punkt statt eines Kommas, oder die Eingabe „solve“ zum Lösen benötigt (vgl. Barzel & Roth 2018: 17). Die Schüler müssen zunächst lernen, zu verstehen, wie sie zu einem Ergebnis gelangen und wie dieses zu verstehen ist (vgl. Drijvers & Barzel 2011: 57).

Neben der Verwendung von Computern in speziell eingerichteten PC-Räumen und CAS-Taschenrechnern werden auch Tablets und Smartphones immer häufiger im Mathematikunterricht eingesetzt. Mittlerweile sind Smartphone- oder Tablet-basierte Computer-Algebra-Apps kostenlos zu erwerben und werden von vielen Schülern bereits fernab des Mathematikunterrichts verwendet (vgl. Klinger 2019a: im Druck)[3]. Konzipiert sind diese beispielsweise in Form „*eines wissenschaftlichen Taschenrechners, eines Funktionenplotters oder eines symbolischen Gleichungslösers bzw. Kombinationen aus dem Vorgenannten*“ (ebd.).

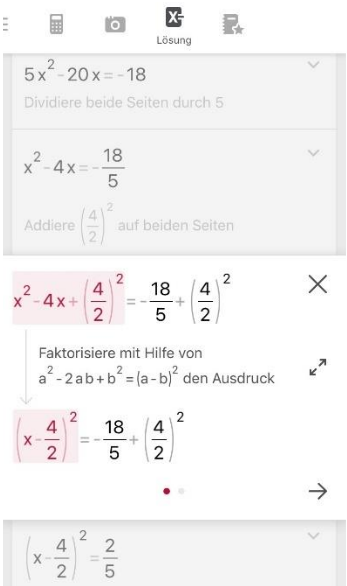

Abbildung 1

Besonders beliebt ist die App *Photomath*, welche im Google Play Store mittlerweile über 1.000.000 Bewertungen verzeichnen kann und durchschnittlich mit 4,7 von 5 Sternen bewertet wurde. Die App-Entwickler geben auf ihrer Website sogar an, monatlich 1.234.054.453 Probleme zu lösen und zu erklären (vgl. Website von Photomath). Im Vergleich zu anderen Apps wie *Math42*, *Mathway* oder *Cymath*, kann *Photomath* auch offline, also ohne aktive Internetverbindung genutzt werden, was insbesondere für den Einsatz im Unterricht interessant wäre (vgl. Klinger 2019a).

Daher werden im Folgenden der Aufbau und die Funktion solcher CAS-Apps anhand von *Photomath* erläutert.

Um Gleichungen mit Photomath zu lösen, können diese zwar extra händisch eingegeben werden, die App greift auf Wunsch aber auch auf die Kamera des Smartphones oder Tablets zu und scannt damit die Aufgabe ein. Vorteilhaft ist ebenfalls, dass das CAS hintergründig arbeitet, also selbst bei der manuellen Eingabe der Aufgabe keine direkten Befehle wie „*solve*“ eingegeben werden müssen, wie es bei einem

[3] Die Werke Klinger 2019a, 2019b sowie Klinger & Schüler-Meyer 2019 befinden sich noch im Druck, weshalb keine Seitenzahlen angegeben werden können.

CAS-Taschenrechnern üblich ist (vgl. ebd.: 2 f.). Weiterhin bietet die App die Möglichkeit, das Lösungsverfahren selbst zu wählen. Neben der p-q-Formel kann der Nutzer zwischen der a-b-c-Formel, der quadratischen Ergänzung oder der Faktorisierung wählen. Das Ergebnis wird dann, im Gegensatz zu klassischen CAS-Rechnern, in verschiedenen Teilschritten dargestellt.

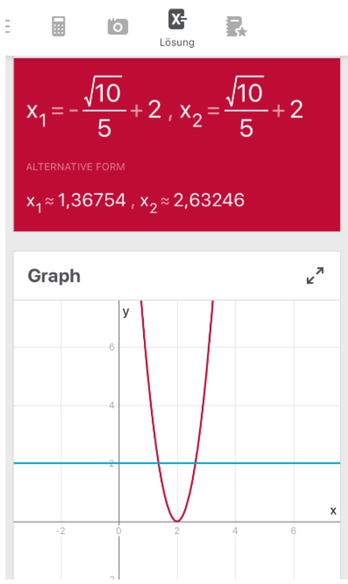

Abbildung 2

Diese können bei Bedarf aufgefaltet werden, wobei das Vorgehen fachsprachlich erläutert wird (vgl. Klinger 2019 b). *Photomath* bietet neben der algebraischen auch eine graphische Lösung an, womit eine thematische Verknüpfung zwischen der Nullstellenproblematik und dem Funktionsgraphen möglich ist. Erläuterungen zu den graphischen Darstellungen fehlen in der App jedoch, weshalb Vernetzungen selbstständig vorgenommen werden müssen (vgl. Barzel & Roth 2018: 19).

Photomath ist nur für das Lösen klassischer Rechenaufgaben geeignet. Ein Bearbeiten von Textaufgaben, die Beantwortung von Reflexionsaufforderungen oder das Aufstellen eigener Gleichungen sind nicht möglich. Somit wird mit der Nutzung der App eher die Anwendung eines Schemas bzw. Kalküls trainiert, der Aufbau von Grundvorstellungen oder Fehlerwissen ist durch die alleinige Nutzung der App nicht realisierbar (vgl. Drijvers & Barzel 2011: 55).

Genauso wie der CAS-Rechner ist *Photomath* demnach nicht als Einführungsmittel oder für die Erarbeitung der Äquivalenzumformung geeignet. Erst, wenn Grundkenntnisse erworben wurden, können diese mit Hilfe der App vertieft werden (vgl. ebd.). Auch, wenn die App textuelle Erläuterungen anbietet, sind diese durchweg fachsprachlich formuliert, weshalb Grundkenntnisse vorhanden sein müssen, um die Erklärungen verstehen zu können (vgl. Klinger 2019 a). Es geben zwar viele Nutzer an, dass sie mit *Photomath* ihre Hausaufgaben kontrollieren oder lernen und die App ihnen hilft, das Lösen von Gleichungen zu verstehen. Es ist jedoch fraglich, ob sich dieser Verstehensbegriff mit dem der Literatur deckt. Ein Üben mit dieser App begünstigt eine rezeptartige Verwendung von Lösungsverfahren, was eher zu einer Verstehensillusion als zu echtem Verständnis führt (vgl. ebd.: 12). Des Weiteren kann durch den Gebrauch der App oder CAS-Rechnern die manuelle Rechenfertigkeit der Schüler abnehmen, was Kritiker annehmen (vgl. ebd.: 2). Darüber hinaus sehen sie eine Gefahr darin, dass das Auslagern von Denkprozessen an technologische Unterstützungen zu einer Verminderung der Denkleistung bei Schülern führt. Dies könnte zur Folge haben, dass sich die Schnelligkeit und die Qualität des Denkens verschlechtert (vgl. Thurm et al. 2017: 2).

Im außerschulischen Bereich der Hausaufgaben bzw. des selbstständigen Lernens erfreuen sich Apps wie *Photomath* jedoch bereits großer Beliebtheit, weshalb ein Ignorieren solcher Apps die Problematik nur verschleiern würde. Ein durch die Schule ausgesprochenes Verbot der App-Nutzung könnte sogar dazu führen, dass die Schüler fernab des Unterrichts komplett auf handschriftliches Lösen verzichten und nur noch mit solchen Apps arbeiten, da sie den Reiz des Verbotenen ausstrahlen (vgl. Klinger & Schüler-Meyer 2019). Davon abgesehen, dass Lehrkräfte keine Kontrolle über die zu Hause verwendeten Hilfsmittel haben, nutzen viele Schüler mittlerweile in Phasen des selbstständigen Lernens Apps oder Erklärvideos, die das Kalkül bedienen (vgl. Klinger 2019 a). Durch die enorme Anzahl an Downloads – im Play Store hat *Photomath* bereits über 50.000.000 – kann davon ausgegangen werden, dass ein Großteil der Schülerschaft sie bereits verwendet und mit ihrem Umgang vertraut ist. Daher erscheint es sinnvoll, den Umgang, aber auch Grenzen der Apps im Unterricht „*explizit zu thematisieren, diese kritisch zu diskutieren und ihren Einsatz zu reflektieren*“ (Klinger 2019 a).

Denn so können die Schüler dabei unterstützt werden, Verantwortung für ihr eigenes Lernen zu übernehmen und sich bewusst für Lernstrategien zu entscheiden, was eine Voraussetzung für lebenslanges Lernen darstellt (vgl. Kernlehrplan 2004: 11).

7. Stand der Forschung

Da es sich bei *Photomath* um eine relativ neue App handelt und Smartphones sowie Tablets noch selten im Unterricht verwendet werden, „lassen sich kaum Anzeichen einer gezielten schulischen Verwendung finden“ (Klinger 2019 a).

ZELLER & BARZEL führen in ihrem Artikel „*Der Einsatz von CAS im Mathematikunterricht - zum Stand der Forschung*“ Studien an, die Aussagen über die Effektivität von CAS-Taschenrechnern beim Lehren und Lernen treffen. KIERAN & DRIJVERS stellten 2006 fest, dass die Integration von CAS durchaus positive Effekte auf den Aufbau konzeptuellen Wissens bei Schülern hat. Auch die Auswirkungen auf das Unterrichtsgeschehen sind vielversprechend. Bei einem umfassenden genetischen Aufbau des Unterrichts hilft er, die Lösungsprozesse global zu verkürzen, regt die Schüler allein durch seine Verwendung nicht kognitiv an (vgl. Zeller & Barzel 2011: 920). Die Integration offener Aufgaben wird jedoch unterstützt, da der Fokus der Schüler durch die entlastenden Funktionen des CAS auf „Tätigkeiten, wie dem Bewerten von Modellen und Lösungen liegt“ (ebd.: 921).

Die durchgeführte Erhebung erweitert demnach die vorliegenden Forschungsergebnisse.

8. Entwicklung der Forschungsfrage

Auf Basis der zuvor vorgestellten Literatur lässt sich nun folgende Fragestellung formulieren:

Kann Photomath so in den Unterricht integriert werden, dass Schüler das Lösen quadratischer Gleichungen produktiv und nachhaltig üben?

Es wurde dargestellt, dass Schüler mit Smartphones ausgestattet sind und diese täglich nutzen. Aufgrund der hohen Downloadrate kann darauf geschlossen werden, dass *Photomath* einem Großteil der Schüler bekannt ist und von ihm genutzt wird. Die Nutzer der App bearbeiten mit ihr in ihrer Freizeit Hausaufgaben und wenden sie zum Lernen an. Eine alleinige Verwendung von *Photomath* unterstützt jedoch nicht den Aufbau von Grundvorstellungen oder konzeptuellem Wissen, sondern nur kalkülhaftes Vorgehen.
Da sie auch ohne aktive Internetverbindung eingesetzt werden kann, steigt ihre Attraktivität auch für die unterrichtliche Nutzung. Die WLAN-Ausstattung der Schulen ist, wenn denn überhaupt vorhanden, noch nicht für die gleichzeitige Nutzung aller Schüler ausgelegt. Zudem ist die Anschaffung der App, im Gegensatz zu CAS-Rechnern, kostenlos.

Aus diesem Grund interessiert aus didaktischer Perspektive, ob die Verwendung von *Photomath* ein didaktisches Potential für den Mathematikunterricht eröffnen kann.
Um die vorgestellte Forschungsfrage zu beantworten, werden folgende Hypothesen aufgestellt:

(1) Die App kann sinnvoll in produktive Übungsaufgaben integriert werden.

(2) Die Nutzung der App hilft den Schülern, die algebraische und die graphische Darstellung von quadratischen Gleichungen zu vernetzen.

(3) *Die Nutzung der App verhilft zum schnelleren Arbeiten, da sie die Schüler entlastet.*
(4) *Die Schüler verwenden die App nicht nur, um den Lösungsweg abzuschreiben.*

Die erste Hypothese fußt darauf, dass produktives Üben den Transfer zwischen verschiedenen Themengebieten, was quadratische Funktionen und Gleichungen für die meisten Schüler sind, ermöglicht. Die zweite stützt sich darauf, dass die Schüler die verschiedenen „Gesichter" von Funktionen erkennen und mit Gleichungen verknüpfen können. Ein weiteres didaktisches Potential für den Unterricht liegt darin, den Fokus auf reflektierende oder modellierende Tätigkeiten zu richten, indem die Schüler bei aufwendigen Rechnungen durch die App entlastet werden und so zügiger arbeiten können. Die letzte Hypothese knüpft an die Einschätzung an, dass die Motivation für die Nutzung der App auf geringer Motivation zum Lernen sowie Arbeiten beruht und *Photomath* so zum „Schummeln" einlädt.

II. Empirische Untersuchung

9. Forschungsdesign im Sinne des Design-Based-Research Ansatzes

9.1. Der Ansatz des Design-Based-Research

Zwischen fachdidaktischer Forschung und ihrer Umsetzung in der Praxis ist immer noch eine Kluft wahrnehmbar. Der ausbleibende Transfer von lerntheoretischen Erkenntnissen, die in die Praxis implementiert werden, aber auch von experimentellen Studien, die empirisch zu prüfen sind, ist bekannt und wird als Theorie-Praxis-Problem beschrieben (vgl. Grünewald et al 2014: 238 sowie Klees & Tillmann 2015: 92). An dieser Schnittstelle setzt der Ansatz des so genannten *Design-Based-Research* (DBR) ein. *„Der DBR-Forschungsansatz kann allgemein als nutzungsorientierte Grundlagenforschung verstanden werden, indem Design als theorieorientierter Prozess zur Lösung konkreter Praxisprobleme im Bildungsbereich verstanden wird"* (Klees & Tillmann 2015: 92).

Der Ausgangspunkt des DBR-Ansatzes ist ein praxisrelevantes Problem, zu dem eine Lernumgebung gestaltet wird, die Lerntheorien im konkreten Kontext überprüft, entwirft

und vor allem weiterentwickelt (vgl. ebd.). Unter Lernumgebung wird im weitesten Sinne all das verstanden, was die Schüler von außen instruiert (vgl. Barzel et al. 2005: 30).
Die Weiterentwicklung von Theorien wird innerhalb dieser Studie anhand des geringen Umfangs jedoch noch nicht möglich sein, es können daher lediglich Hypothesen aufgestellt werden. Das Ziel besteht allerdings nicht nur im Überprüfen und Entwerfen wissenschaftlicher Theorien, sondern auch in der Konzeption praxistauglicher Lösungen für das anfängliche Problem (vgl. Reinmann 2005: 56).
Grundlegend für den DBR-Ansatz ist die systematische Gestaltung, Durchführung, Überprüfung und das Re-Design der Lernumgebung. Im Zentrum des Ansatzes steht der Entwicklungsprozess, der sich in zyklischen, iterativen Reflexions-, Überprüfungs- und Überarbeitungsphasen gliedert (vgl. Grünewald et al. 2014: 240 f.). Im Anschluss an die bildungspraktische Problemanalyse (Theoretischer Hintergrund) und die theoretisch fundierte Forschungsfrage inklusive Hypothesen, folgt die Konzeption einer prototypischen Designlösung, die im Laufe der Untersuchung sukzessiv weiterentwickelt wird (vgl. Klees & Tillmann 2015: 93). Die zu berücksichtigenden und zu reflektierenden Faktoren sind äußerst vielfältig, da *die Variablen der Lernumgebung, der Lernsituation und Lernaktivitäten unter alltäglichen, realen Bedingungen und in ihrer Komplexität erfass[t] [werden sollen]"*(Kohnen 2011: 42).

9.2. Vorstellung des Forschungsdesigns

Im Sinne des zuvor dargelegten Ansatzes wurde auf Grundlage der eingangs dargestellten Literatur eine Lernumgebung für Schüler des zehnten Jahrgangs entwickelt. Innerhalb der Studie sollte festgestellt werden, ob die App *Photomath* gewinnbringend für Schüler und Lehrkräfte in den Unterricht integriert werden kann. Aufgrund des durch die Schule zur Verfügung gestellten Zeitfensters, wurden Aufgaben für die Dauer einer Schulstunde, also für 45 Minuten, konzipiert.

Die Zusammenstellung und Begründung der Aufgaben folgen in Kapitel 9.4.. Es war zunächst geplant, eine Unterrichtsstunde für die ganze Klasse zu konzipieren, die während der Bearbeitung der Aufgaben videographiert werden sollte. Dafür mussten zunächst die Einverständniserklärungen der Erziehungsberechtigten eingeholt werden. Von 28 Schülern stimmten jedoch nur acht Erziehungsberechtigte der Methode der Videografie zu, weshalb das Design verändert werden musste.

Der Ansatz des DBR, der eine wiederholte Prüfung und Überarbeitung des Lernarrangements vorsieht, sollte eingehalten werden. Dies hatte zur Folge, dass die acht Schüler jeweils in zwei Vierergruppen aufgeteilt wurden, mit denen im Abstand von zwei Wochen die Erhebung durchgeführt wurde. Aus zeitlichen Gründen seitens der Schule konnte eine anschließende undokumentierte Testung mit der restlichen Lerngruppe nicht durchgeführt werden.

Während der beiden Erhebungen saßen die Schüler paarweise an jeweils zwei zusammengestellten Tischen, die sich an verschiedenen Enden des Raumes befanden. Jeweils eine Kamera versuchte, die Bearbeitung der Aufgaben, die Kommunikation der Schüler und die Verwendung der App zu protokollieren. Den Schülerpaaren wurden absichtlich weit entfernte Positionen im Raum angeboten, um eine gegenseitige Beeinflussung während der Bearbeitung zu unterbinden.

Bei der Konstruktion der Aufgaben wurde zunächst auf Hilfskarten oder ähnliche Unterstützungselemente (vgl. Bruder 2008: 6) verzichtet, um die Schüler zu Rückfragen zu motivieren. Es wurde angenommen, durch Diskussionen oder Rückfragen möglicherweise tiefere Einblicke in die Denkstrukturen der Schüler erhalten zu können. Z.T. sind Schüler durch Aufgabenstellungen oder Haltungen der Lehrer insoweit konditioniert, dass sie bestimmte Antworten geben, weil sie davon ausgehen, dass sie von ihnen erwartet werden. Daher wurde versucht, die Schüler bei der Darstellung von Begründungen so wenig wie möglich zu lenken oder zu beeinflussen. Es wurde sich bemüht, ihnen zu vermitteln, dass ausschließlich Interesse an ihren Denkwegen besteht und nicht die Zustimmung des Interviewers zu erringen ist.

Im Anschluss an die Bearbeitung wurde von jedem Teilnehmer ein Fragebogen ausgefüllt, mit welchem die Erfahrungen mit der App, aber auch mit der Lernumgebung festgehalten wurden.

Dieser bestand aus geschlossenen und offenen Antwortformaten. Die Nutzung der App sollte nach jeder Aufgabe von den Schülern mit Hilfe von Single-Choice-Fragen dokumentiert werden. Damit sollte festgehalten werden können, sofern ehrlich geantwortet wurde, wofür die App vordergründig genutzt wurde. Die Schüler konnten dabei beispielsweise vermerken, ob sie die App überhaupt verwendet hatten. War dies der Fall, sollten sie angeben, ob die Nutzung ausschließlich zum Lösen der Aufgabe oder für die Überprüfung des Ergebnisses gebraucht wurde.

Nach der Durchführung des Prototyps A wurden die Videoaufzeichnungen der Lernumgebung analysiert und wichtige Sequenzen transkribiert. Kurze Pausen wurden entweder durch „-“ oder „--"markiert, längere in Sekunden angegeben.
Aufgrund der gewonnenen Erkenntnisse wurden vorgenommene Änderungen in Prototyp B manifestiert. Auch die Aufzeichnungen der Erhebung mit Prototyp B wurden analysiert und transkribiert. Da keine weitere Datenerfassung folgte, wurden nur mögliche Änderungsvorschläge festgehalten, aber kein neues Arbeitsblatt erstellt.

9.3. Vorstellung der Lerngruppe

Bei der Lerngruppe handelt es sich um sechs Schülerinnen und zwei Schüler eines Erweiterungskurses Mathematik an einer Gesamtschule des Kreises Kleve. Entgegen der Einschätzung des Lehrers haben sich nicht die leistungsstarken, sondern eher die schwächeren Schüler des Kurses bereit erklärt, an der Studie teilzunehmen. Die Noten der Schüler sind durchschnittlich im befriedigenden Leistungsbereich anzusiedeln.

Zwei Wochen vor der Erhebung wurde das Thema der quadratischen Gleichungen eingeführt, davor wurden quadratische Funktionen thematisiert. Einen Tag vor der zweiten Durchführung haben die Schüler eine Klassenarbeit geschrieben, die sowohl quadratische Funktionen als auch den Umgang mit quadratischen Gleichungen umfasste.

Die Gruppierung der Schüler wurde mit dem Ziel vorgenommen, möglichst gleiche Ausgangssituationen zu schaffen. Einer der Schüler hatte zur ersten Erhebung die App noch nicht auf seinem Smartphone installiert, weshalb er spontan mit einer Schülerin tauschte, die für den zweiten Durchgang eingeplant war.

Beim ersten Kennenlernen der Schüler und der Vorstellung des Projekts wurde entgegen der Annahmen der Literatur festgestellt, dass lediglich zwei Schüler des Kurses *Photomath* bereits kannten. Nur einer von beiden hatte probeweise die App ausprobiert, jedoch immer falsche Ergebnisse erhalten, weshalb die Nutzung eingestellt wurde[4].

[4] Es ist in diesem Fall anzumerken, dass die Schülerin nur das Gefühl hatte, mit der App falsche Ergebnisse zu erhalten. Ihre eigenen Berechnungen waren fehlerhaft, da sie diese nicht fand, ging sie von falschen Berechnungen der App aus.

9.4. *Entwicklung des Lehr-Lernarrangements (Prototyp A)*

Bei der Zusammenstellung der Aufgaben wurden verschiedene Schwierigkeitsniveaus beachtet, aber auch versucht, eine Verknüpfung zum zuvor behandelten Unterrichtsinhalt herzustellen. Außerdem wurden Absprachen mit der Lehrkraft getroffen, welche Aufgabentypen die Schüler bereits bearbeitet haben bzw. welche Fragestellungen sie gewöhnt sind. Es wurde angenommen, dass das Arbeiten mit der App, die Betreuung durch eine fremde Person und die anwesenden Kameras bereits außergewöhnlich genug sind, weshalb die Schüler nicht noch zusätzlich mit ungewohnten Formulierungen verunsichert werden sollen.

Insgesamt wurden fünf Aufgaben mit Teilaufgaben konzipiert, die den Umfang von 45 Minuten nicht übersteigen sollten. Zwei anspruchsvollere Aufgaben dienten als didaktische Reserve. Insgesamt sind die Aufgaben der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* zuzuordnen (vgl. KMK 2003: 9). Vorab ist noch anzumerken, dass das Potential, welches *Photomath* beispielsweise durch die Entlastungsfunktion bei Modellierungsaufgaben entfalten könnte, aufgrund der geringen Bekanntheit in der Lerngruppe nicht ausgeschöpft werden konnte. Der Einsatz der App wurde so geplant, dass die Schüler die Funktionen der App zunächst entdecken und kennenlernen können. Sie sollten lernen, die App wie ein Werkzeug zu verwenden, um mathematische Probleme zu erkunden oder die Lösung zu berechnen (vgl. Kernlehrplan 2004: 28).
Der zuständige Lehrer hatte angegeben, dass es sich um einen leistungsstarken E-Kurs handelte und starke Schüler teilnehmen würden.

9.4.1. *Aufgabe 1*

Da die Schüler zuvor das Thema quadratische Funktionen behandelt hatten und eine Verknüpfung zwischen quadratischen Funktionen und Gleichungen für die Lehrkraft ebenfalls obligatorisch ist, sollte die erste Aufgabe daran anknüpfen. Zudem hilft eine beständige Aktivierung erlernter Inhalte, sie nicht zu schnell zu vergessen. Da die Durchführung kurz nach den Weihnachtsferien erfolgen sollte, erschien eine Thematisierung auch aus dieser Perspektive sinnvoll zu sein (vgl. Bruder 2008: 5).

Nach Aussage der Lehrkraft wurden ähnliche Aufgaben bereits im Unterricht gelöst, weshalb es sich um eine Reproduktionsleistung des Anforderungsbereichs I (KMK) handelt: „*Dieser Anforderungsbereich umfasst die Wiedergabe und direkte Anwendung von* *grundlegenden Begriffen, Sätzen und Verfahren in einem abgegrenzten Gebiet und einem wiederholenden Zusammenhang.*“ (vgl. 2003: 13). Trotzdem zeichnet sich die Aufgabe durch einen mittleren kognitiven Anspruch aus, da die Schüler Querverbindungen zwischen Themengebieten vornehmen müssen (vgl. Drüke-Noe & Siller 2018: 3). Sie fördert die Kompetenzen des *mathematischen Argumentierens* und des *Umgangs mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik*. Verwenden die Schüler den Graphen in *Photomath* für ihre Argumentation, wird auch die *Verwendung mathematischer Darstellungen* aktiviert (vgl. KMK 2003: 8).

Aufgabe 1

a) Welche Informationen kannst du aus den Gleichungen über die zugehörigen Graphen entnehmen? Beschreibe, aus welchen Parametern du die Informationen ableiten kannst. Forme die Gleichungen, wenn nötig, um.

(1) $\frac{1}{2} x^2 - 8 = 0$ (2) $6 (x - 2) = 4 - x^2$ (3) $5x^2 - 20x + 20 = -2$

b) Löse die Gleichungen. Vergleiche deinen Lösungsweg mit dem von Photomath. Was fällt dir auf?

Ich habe Photomath verwendet: ja ❑/ nein ❑,
❑ *um die Aufgabe zu lösen*
❑ *um das Ergebnis zu überprüfen*

Abbildung 3

Das Argumentieren wird durch die Passagen „*beschreibe, aus welchen Parametern du die Informationen ableiten kannst*“ und „*was fällt dir auf?*“ aktiviert. Im Sinne des Verbalisierens „*erläutern [sie] mathematische Zusammenhänge und Einsichten mit eigenen Worten und präzisieren sie mit geeigneten Fachbegriffen*“ (Kernlehrplan 2004: 27). Außerdem vernetzen sie Gleichungen und Graphen und nutzen mathematisches Wissen für ihre Begründung, was die prozessbezogenen Kompetenzen *Vernetzen* und *Begründen stärkt* (vgl. ebd.).

Durch die Verknüpfung von Graph und Gleichung ist die Aufgabe der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* sowie den inhaltsbezogenen Kompetenzen *Algebra* und *Funktionen* zuzuordnen. Die Schüler verwenden bei der Lösung der Gleichung Verfahren, die auf Algorithmen bzw. Kalküle fußen (vgl. KMK 2003: 12, Kernlehrplan 2004: 29), wobei sie zwischen der quadratischen Ergänzung, der p-q-Formel oder dem Satz von Vieta wählen können (vgl. Barzel et al. 2019: 2). Außerdem operieren die Schüler im Bereich der Algebra, indem sie radizieren und einfache quadratische Gleichungen lösen (vgl.

Kernlehrplan 2004: 29). Durch die Deutung der Parameter interpretieren sie Funktionen im Sinne des Kernlehrplans (vgl. ebd.: 30).

Durch den Vergleich der eigenen Lösung mit der von *Photomath* in Aufgabenteil b), werden die Schüler aktiv darauf hingewiesen, die App zu verwenden. Da die Schüler *Photomath* vor der Verwendung innerhalb des Projektes nicht kannten, sollen solche Aufforderungen sie aktiv auf die verschiedenen Nutzungsmöglichkeiten hinweisen, z.B. auf die verschiedenen Lösungsmodi. Gleichzeitig intendiert die Fragestellung eine Reflexionshandlung der Schüler und eine bewusste und gezielte Auseinandersetzung mit der eigenen Lösung.

Als Hürde wurden unter anderem die Formulierung der Aufgabe erkannt: „*Welche Informationen kannst du aus den Gleichungen über die zugehörigen Graphen entnehmen?*“. Es wurde angenommen, dass den Schülern unklar sein könnte, welche Informationen sie der Gleichung entnehmen können und sollen. Daher wurde eine Konkretisierung eingefügt, die darauf verweist, dass die Informationen den Parametern entnommen werden können. Möglicherweise ist der Begriff Parameter unbekannt, kann jedoch mündlich als Umschreibung für die Variablen der Gleichung erläutert werden. Zudem wurde bedacht, dass den Schülern nicht bewusst sein könnte, dass sie die Gleichung in die Scheitelpunktform überführen müssen, um relevante Informationen, wie die Lage des Extremums, über den Graphen zu erhalten (vgl. Lemmermeyer 2016: 30). Für diese Situation dient der letzte Satz der Aufgabenstellung als Hinweis: „*Forme die Gleichung, wenn nötig, um“*.
Des Weiteren können Schwierigkeiten bei der rechnerischen Lösung der Aufgabe auftreten, weil Verfahren nicht beherrscht werden, auf Wissen über binomische Formeln zugegriffen werden muss oder die Schüler sich verrechnen, die Fehler aber nicht finden. Diese können jedoch mit Hilfe der App lokalisiert, bestenfalls nachvollzogen und korrigiert werden. Gerade die dritte Gleichung zielt auf ein Denken in Strukturen ab, indem die Gemeinsamkeiten der Termbestandteile erkannt werden.

Durch die Konzeption der Aufgabe wird ein isoliertes Lösen von quadratischen Gleichungen vermieden. Neben automatisierenden Elementen bietet die Aufgabe solche, die das Begriffsverständnis stärken und welche, die den *Transfer* anleiten. Außerdem werden die Schüler zu reflexiven Überlegungen angeregt, weshalb die Aufgabe dem produktiven Üben zuzuordnen ist (vgl. Leuders & Wittmann 2006: 2f.).

9.4.2. *Aufgabe 2*

Aufgabe 2 sollte die Schüler, insofern sie sie noch nicht entdeckt hatten, auf die graphische Darstellung von Funktionen hinweisen. Außerdem diente die Aufgabe als Bindeglied zwischen quadratischen Funktionen und Potenzfunktionen, da diese nachfolgend im Mathematikunterricht thematisiert werden sollten. In Mathematikbüchern und im Unterricht ist es üblich, überwiegend Aufgaben zu behandeln, die sich im Bereich der aktuellen Unterrichtsinhalte bewegen. Diese Aufgabe wurde daher absichtlich eingefügt. Sie verwischt die Grenzen von Entdeckung und Übung. Während die Verwendung und Interpretation quadratischer Gleichungen geübt wird, können Ähnlichkeiten und Unterschiede zu Potenzfunktionen entdeckt werden.

Aufgabe 2

Betrachte die Graphen der folgenden Funktionen mit Photomath. Was fällt dir auf? Beschreibe, was du siehst.

(1) $f(x) = x^3 - 4$ (2) $f(x) = -x^3$ (3) $f(x) = -2x^3 + 1$

(4) $f(x) = x^3$ (5) $f(x) = 0{,}5x^3 - 3$

Abbildung 4

Dieser nahtlose Übergang zählt zu den Prinzipien des produktiven Übens, nach welchen auch „*entdeckend geübt und übend entdeckt wird*“ (vgl. Winter 1984: 6 f.). Der Vergleich der Funktionsgraphen frischt einerseits das Wissen über quadratische Funktionen auf, andererseits werden Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ungeradem Exponenten erkannt. Zugleich wurde mit der Aufgabe eine Monotonie der Arbeitsschritte unterbrochen. Die Aufgabenstellung ist bewusst offen gehalten, intendiert war jedoch ein Vergleich der Eigenschaften von quadratischen Funktionsgraphen und denen von Potenzfunktionen.

Eine mögliche Hürde wurde in der relativ offenen Aufgabenstellung gesehen. Teilweise verunsichert das Fehlen von Aufforderungen die Schüler, da sie gewohnt sind, Aufgaben schrittweise zu bearbeiten bzw. sich genau an den Anweisungen zu orientieren und die Aufträge minutiös zu befolgen. Dies mag an den üblicherweise verwendeten Aufgaben, den Angewohnheiten des Lehrers oder dem Unbehagen der Schüler liegen, etwas falsch zu machen. Bei dieser Aufgabenstellung ist selbstständiges Denken im Sinne des produktiven Übens jedoch erwünscht (vgl. Leuders & Wittmann 2006: 2). Sollten die Schüler Unsicherheiten zeigen, wie die Aufgabe zu bearbeiten ist, können ihnen mündlich Hinweise gegeben werden.

Die Aufgabe ist selbstdifferenzierend, je nach Tiefe der Beobachtungen variieren Schwierigkeit und Umfang, weshalb sie auch für schwächere Schüler geeignet ist. Durch die vergleichende Betrachtung der Graphen erkennen sie Beziehungen zwischen Darstellungsformen, kommunizieren miteinander über ihre Entdeckungen und Ergebnisse (vgl. KMK 2003: 8 f.), vernetzen aber auch die verschiedenen Funktionen miteinander (vgl. Kernlehrplan 2004: 27). Neben der Facette der *Begriffsbildung* werden auch die Übungsziele *Konsolidierung* und *Transfer* aktiviert. Die Schüler werden dazu aufgefordert, eigenständig zu denken und Verknüpfungen herzustellen, weshalb es sich um eine produktive Übungsaufgabe handelt. Bei dieser Aufgabe wird von den Schülern mehr gefordert als eine rezeptartige Anwendung von Algorithmen. *Photomath* kann in diesem Sinne zum Erkunden verwendet und nicht zum „Schummeln" missbraucht werden (vgl. Klinger & Schüler-Meyer 2019).

9.4.3. *Aufgabe 3*

Aufgabe 3 wurde dahingehend konzipiert, zu einem vertiefenden Verständnis quadratischer Gleichungen beizutragen, indem den Schülern ausreichende Möglichkeiten zum Wiederholen präsentiert werden (vgl. Bruder 2008: 7).

Aufgabe 3

a) Welche Verfahren zum Lösen von quadratischen Gleichungen kennst du?

b) Wähle jeweils das für dich sinnvollste Verfahren aus und begründe deine Wahl.

(1) $x^2 = x + 2$
(2) $2x^2 + 4x + 4 = x - 2 - x^2$
(3) $2x^2 - x - 4 = 20 + x$

c) Welches Verfahren ist für dich das schwierigste, welches das leichteste? Begründe.

Abbildung 5

Neben dem Automatisieren wird versucht, die *Begriffsbildung* zu stärken, aber auch das Wissen, welches die Schüler aufgebaut haben, zu konsolidieren. Die Schüler lösen die Gleichungen „*kalkülmäßig bzw. algorithmisch […] und vergleichen ggf. die Effektivität ihres Vorgehens mit anderen Lösungsverfahren*" (KMK 2003: 12). Aus diesem Grund wurden den Berechnungskomponenten Reflexionsaufforderungen angehängt (vgl. Klinger 2019 a).

Nachdem in der Stunde vor der Erhebung der Satz von Vieta eingeführt wurde, kann angenommen werden, dass die Schüler den Satz zumindest als Hilfsmittel nennen können. Erwartet werden zunächst die Antworten p-q-Formel und quadratische Ergänzung. Ob die Schüler eine graphische Lösung als Verfahren kennen, ist ungewiss.
Aufgabenteil b) soll die Schüler darauf hinweisen, dass manche Aufgaben zeitsparender anhand eines bestimmten Verfahrens gelöst werden. In diesem Fall könnte die erste Gleichung auch als Schnittpunkt einer quadratischen und einer linearen Funktion aufgefasst werden. Häufig verwenden Schüler stets das Verfahren, in dem sie sich am sichersten fühlen. Für das weitere Unterrichtsgeschehen wäre eine Thematisierung der begründeten Vorlieben interessant, um vertiefende Erläuterungen oder Erklärungen einzupflegen.
In Aufgabenteil c) erhalten die Schüler wiederholt einen reflexiven, argumentativen Arbeitsauftrag, der gleichzeitig ihre Metakognition anregen soll (vgl. Sjuts 2018: 20).

Die Schüler sollen sich bewusst mit ihren Stärken und Schwächen auseinandersetzen und versuchen, sich selbst ein klareres Bild von möglichen Problemen zu zeichnen, um nicht nur in den Kategorien „Kann ich“ und „ Kann ich nicht“ zu denken.
Im Bereich der prozessbezogenen Kompetenzen verbalisieren und begründen sie ihr Vorgehen (vgl. Kernlehrplan 2004: 27).
Neben fehlerhaften Rechnungen könnte auch die unlösbare zweite Gleichung Probleme bereiten, da die richtige Lösung als vermeintlich falsch betrachtet werden könnte. Außerdem könnten die Schüler im Unklaren darüber sein, was unter der Bezeichnung „am sinnvollsten“ verstanden wird. Diese Hürde kann jedoch verbal in der Situation behoben werden.

9.4.4. Didaktische Reserve: Aufgabe 4

Aufgabe 4 stellt wie eingangs erwähnt, eine didaktische Reserve dar, sollten die Schüler des E-Kurses so schnell sein, dass noch weitere Lernzeit vorhanden ist. Es ist auch vorstellbar, dass ein Schülerpaar mit den vorherigen Aufgaben unterfordert ist, sodass aus diesem Grunde die Bearbeitung verkürzt und auf die folgenden Aufgaben zurückgegriffen wird.
Diese Aufgabe hat im Vergleich zu den vorher gestellten Aufgaben ein erhöhtes Schwierigkeitslevel. Sie kann dem Anforderungsbereich III zugeordnet werden, da ein anspruchsvolles Problem bearbeitet und eigene Lösungsideen und -wege reflektiert werden müssen (vgl. KMK 2003: 14).

Anstatt auf die Lösung einer Gleichung hinzuarbeiten, müssen die Schüler nun die Problemlösestrategie *Rückwärtsarbeiten* anwenden, wodurch prozessbezogene Kompetenzen dieser Art gefördert werden (vgl. Kernlehrplan 2004: 27).

Aufgabe 4

a) Stelle eine quadratische Gleichung auf, deren Ergebnis 2 ist. Beschreibe, wie du vorgegangen bist.
b) Woran kannst du bei einer quadratischen Gleichung erkennen, dass sie

(1) 2 Lösungen hat.
(2) 1 Lösung hat.
(3) Keine Lösung hat.

Abbildung 6

Sie werden dazu aufgefordert, eine quadratische Gleichung zu einer einelementigen Lösungsmenge aufzustellen. Entweder könnte dabei die Nullstellenproblematik berücksichtigt und somit die Scheitelpunktform aufgestellt werden. Im Anschluss daran könnte „*auch die geforderte Darstellung hergeleitet werden. Dieser Lösungsweg basiert in besonderem Maße von einer adäquaten funktionalen und im Speziellen graphischen Vorstellung der thematisierten Gleichung*“ (Klinger 2018: 366 f.). Andernfalls könnte eine Lösung mit Hilfe der Diskriminante erzielt werden, dem Term unter dem Wurzelzeichen der p-q-Formel. Dafür müsste bekannt sein, welchen Einfluss der Wert der Diskriminante auf die Lösung einer Gleichung hat. Ist die Diskriminante positiv, hat die Gleichung zwei Lösungen. Ist sie negativ, hat die Gleichung keine Lösung. Nimmt die Diskriminante den Wert null an, gibt es nur eine Lösungsmöglichkeit. Die Schüler müssen also ihr bereits aufgebautes Wissen flexibel anwenden können.
Wie bereits erwähnt, setzt die Aufgabe ein umfangreiches Wissen zu quadratischen Gleichungen und Funktionen voraus, was dementsprechend eine Hürde für die Schüler darstellen kann. Sie müssen über eine Strategie verfügen, eine Gleichung ausgehend von einer Lösung aufzustellen. Aus diesem Grund kann Aufgabenteil b) als Hinweis betrachtet werden, der einen Denkanstoß zur Lösung liefern kann.

Da der Mathematikunterricht selten genug Gelegenheit zu Schreibanlässen bietet, werden die Schüler dazu aufgefordert, ihr Vorgehen zu beschreiben. Die Verbalisierung des eigenen Handelns bietet verschiedene Vorteile. Zum einen ist Sprachbildung eine Aufgabe aller Unterrichtsfächer, also auch für den Mathematikunterricht (vgl. van Ackeren et al. 2015: 161), zum anderen setzen sich die Schüler so mit der Fachsprache auseinander und lernen somit Mathematik besser zu verstehen. Außerdem werden metakognitive

Kompetenzen der Bewusstheit und der Reflexion aktiviert, indem sich daran erinnert wird, wie genau die Lösung erhalten wurde. Dieses Vorgehen hilft außerdem dabei, das Wissen zu festigen und Strategien herauszubilden. Die Aufgabe kann somit im Sinne Winters als produktive Übungsaufgabe bezeichnet werden (vgl. Winter 1984: 12 ff.).

9.4.5. Didaktische Reserve: Aufgabe 5

Auch Aufgabe 5 hat ein erhöhtes Anforderungsniveau, welches abhängig von den Fähigkeiten der Schüler dem Anforderungsbereich II oder III einzuordnen ist. Bei der Aufgabe handelt es sich um eine Abwandlung einer Aufgabe des Bayrischen Staatsinstituts für Bildungsforschung, die für den Mathematikunterricht an Gymnasien konzipiert wurde (vgl. ISB: 9). Die Schüler müssen für die Lösung dieser Aufgabe die gegebene Situation verstehen und die gegebenen Größen auf die Abbildung der Flagge übertragen.

Aufgabe 5

Die dänische Nationalflagge, der sogenannte Danebrog, zeigt ein weißes Kreuz auf rotem Grund.

a) Ein rechteckiges Fahnentuch hat eine Länge von 3 Metern und eine Breite von 2 Metern. Bestimme für dieses Fahnentuch die Breite des weißen Streifens so, dass der Flächeninhalt des Kreuzes ein Viertel des Flächeninhalts des Rechtecks beträgt.

b) Bei einem anderen Fahnentuch mit denselben Verhältnissen, ist der Streifen 1 Meter breit. Berechne die Maße der Fahne.

Abbildung 7

Eine Hürde dürfte es für sie darstellen, die gegebenen Größen und Verhältnisse in eine passende Gleichung zu übertragen. Außerdem dürfte ihnen die Verknüpfung einer quadratischen Gleichung mit Flächen nicht so geläufig sein, wie mit Brücken oder Wurfbahnen, die gezielt im Unterricht thematisiert wurden. Zudem muss die aufgestellte Gleichung korrekt gelöst werden. Das bedeutet, dass die Termstrukturen erkannt und die richtigen Umkehroperationen gewählt werden müssen (vgl. Klinger 2018: 277). Des Weiteren stellen das Bearbeiten und Lösen von Textaufgaben für viele Schüler eine Schwierigkeit dar, weshalb eine unterstützende Abbildung notwendig ist.

Aufgrund der für die Schüler ungewöhnlichen Thematik könnte ihnen die Verbindung zwischen quadratischen Funktionen, Verhältnissen und Flächen schwerfallen und dementsprechend falsche Gleichungen aufgestellt werden. Durch die Aufgabe werden sie höchstwahrscheinlich vor ein Problem gestellt, welches sie nicht auf Anhieb lösen können, weshalb ihre Problemlösekompetenzen gefördert werden (vgl. KMK 2003: 8 und Kernlehrplan 2004: 27).

Außerdem arbeiten sie mit Symbolen, Termen und Gleichungen, indem sie natürliche Sprache in symbolische übersetzen und Kontrollverfahren ausführen (vgl. ebd.). Im Vergleich zu den ersten drei Aufgaben, wird der Verwendung von *Photomath* innerhalb der didaktischen Reserve eine entlastende Funktion zugeschrieben. Die Verwendung der App soll den Schülern helfen, Strategien zur Lösungsfindung zu verfolgen (vgl. Herold-Blasius & Rott 2018: 2). Gleichungen, die sonst mühsam berechnet werden mussten, können sofort eingetippt oder abfotografiert und ausgerechnet werden. Die Ansätze der einzelnen Lösungsprozesse können so verkürzt werden und der Fokus der Schüler kann sich auf Tätigkeiten, wie das Überdenken der verwendeten Strategie oder das Reflektieren der Lösungen richten (vgl. Zeller & Barzel 2011: 921). Auch in Aufgabenteil b), bei dem wieder rückwärts gearbeitet werden muss, ist diese Entlastung von Vorteil. Zwar haben die Schüler zuvor eine Strategie für die Lösung entwickelt, die sie dann nur noch umkehren müssen, jedoch zeigt sich hier, ob sie ihre Lösung tatsächlich verstanden haben. Die Teilaufgabe b) soll die erarbeitete Strategie festigen und flexibilisieren.

Da die Schüler auch in dieser Aufgabe kein „Rezeptwissen“ anwenden können, sondern zum Nachdenken aufgefordert werden, handelt es sich um eine produktive Übungsaufgabe.

9.5. Optimierung des Lehr-Lernarrangements (Prototyp B)

Nachfolgend werden zunächst kurz prägnante Ergebnisse aus der ersten Anwendung dargestellt, die anschließend reflektiert werden. Im Abschluss erfolgt eine Anpassung des Prototypen A zu Prototyp B. Die vier Teilnehmer wurden anonymisiert und jeweils ein Buchstabe von A bis D zugewiesen, der Buchstabe I kennzeichnet den Interviewer. Für die Darstellung der Ergebnisse werden nur Passagen der Transkripte eingefügt. Die vollständigen Transkripte und Schülerlösungen befinden sich im Anhang. Vorab ist noch anzumerken, dass die genaue Konstellation und das tatsächliche Leistungsniveau der Schüler erst direkt vor der Durchführung bekannt gegeben wurden. Die Konzeption der Gleichungen war beabsichtigt schwieriger gestaltet worden, um die Schüler nicht zu unterfordern. Die Bemühungen hatten nun den gegenteiligen Effekt. Es konnte nur die erste Aufgabe besprochen werden.

Bezogen auf die Aufgabenstellung kann festgehalten werden, dass die Reihenfolge der Arbeitsanweisungen in Aufgabe 1 ungünstig ist. Die Schüler sollen zunächst in die Scheitelpunktform umformen, um anhand der Parameter die benötigten Informationen ablesen zu können.

Aufgabe 1

a) Welche Informationen kannst du aus den Gleichungen über die zugehörigen Graphen entnehmen? Beschreibe, aus welchen Parametern du die Informationen ableiten kannst. Forme die Gleichungen, wenn nötig, um.

(1) $\frac{1}{2} x^2 - 8 = 0$ (2) $6 (x - 2) = 4 - x^2$ (3) $5x^2 - 20x + 20 = -2$

b) Löse die Gleichungen. Vergleiche deinen Lösungsweg mit dem von Photomath. Was fällt dir auf?

Abbildung 8

In der Praxis hat sich gezeigt, dass die Schüler immer direkt die Gleichung gelöst und danach versucht haben, zur Scheitelpunktform überzugehen.

86	21:31	I	Also ihr rechnet die direkt aus? – mit der p-q-Formel?
87	21:37	B	Ja also das ist ja jetzt die Umformung [*zeigt auf die Normalform*] und dann würde ich jetzt hier drunter schreiben, was ich ablesen kann‘ und dann b offen.
88	21:41	I	Klar, wenn du aus der Normalform schon viel ablesen kannst? [3 Sek.]
89	21:52	B	Oder muss ich jetzt hier wieder das Gleiche machen wie da oben [Gleichung 1]

Tabelle 1

Der Begriff *Parameter* war den Schülern unbekannt, was zu erwarten war (vgl. Transkript 1: 1-5). Nachdem dies erklärt wurde, herrschte Uneinigkeit, ob die Ziffer acht in der ersten Gleichung $\frac{1}{2}x^2 - 8 = 0$ das *q* der p-q-Formel oder den Schnittpunkt mit der y-Achse markiert (vgl. Transkript 1: 8 f.). Ansätze für das Lösen der Gleichungen wurden von den Schülern gefunden, das Ableiten der Informationen stellte die größere Hürde dar (vgl. Transkript 2: 7 f.).

Die angegebene Gleichung wurde teils als Normalform missverstanden „*Äh ich denke die Normalform? Die oben angegeben ist?*“ (vgl. Transkript 1: 32). Parameter a wurde nicht beachtet.

19	06:07	B	Mhm. Doch ja.- Und dann umformen einfach so äh – wieder plus - das x alleine stellen?
20	06:21	B	Die Normalform ist ja eigentlich angegeben, dann müssen wir jetzt nur noch in die p-q-Formel einsetzen oder?

Tabelle 2

Problematisch war auch das eigenständige Aufstellen der Scheitelpunktform aus der angegebenen Gleichung. Es wurde angenommen, dass direkt aus der Gleichung in die Form eingesetzt werden kann.

33	09:06	I	Wisst ihr noch mal wie die ist? [Scheitelpunktform]
34	09:07	A	Mhm [*verneint*]
35	09:08	I	[*Schreibt die allgemeine Scheitelpunktform an: a (x-d)²+e*] So. Kommt ihr noch weiter? Wie man jetzt die Form [umgeformte Gleichung] zu der - hinbekommt? [3 Sek.]
36	09:31	B	Ne. [*Alle lachen,* 3 Sek.] Ich glaub ähm a ist in dem Fall ½?
37	09:36	I	Mhm [*bejaht*].
38	09:37	B	Und dann – x [2 Sek.] x-8? Und dann – e ist nicht gegeben? Oder anders?

Tabelle 3

Es wurde zum Teil versucht, $6 \cdot (x-2) = 4 - x^2$, direkt aus der Gleichung abzulesen, bzw. in die Scheitelpunktform zu übersetzen (vgl. Transkript 1: 72 f.).
Die dritte Gleichung bereitete ebenfalls Probleme. Die Struktur der Terme wurde nicht erkannt, weshalb die Schüler erst darauf hingewiesen werden mussten (Transkript 1: 111-120). Auch die Formulierung der zweiten Aufgabe gab, wie erwartet, Anlass zu Spekulationen, zumindest bei den Schülern C und D.

49	29:27	C, D	Was wollen die jetzt damit? Was mir auffällt? [Aufgabe 2] [scrollen beide rauf und runter, 3 Sek.] Welche Nullstellen das hat? Oder was?
50	29:49	D	Ich frag mich das auch.

Tabelle 4

Die Fragestellung „*was fällt dir auf?* sollte zum Nachdenken anregen, bei diesen beiden Schülern hat sie ihren Zweck jedoch verfehlt. D hat etwas zu den veränderten Nullstellen feststellen können, jedoch nur „Nullstellen (0|0)“ als Bearbeitung der gesamten Aufgabe festgehalten, sodass keine weiteren Schlüsse gezogen werden können.

Der Arbeitsauftrag in Aufgabe 3 wurde von C und D fehlinterpretiert. Sie haben „*wähle jeweils das für dich sinnvollste Verfahren aus und begründe deine Wahl*“ wörtlich aufgefasst: „*Wir müssen nicht rechnen*“ (Transkript 2: 66). Anstatt die Aufgaben mit dem jeweiligen Verfahren zu lösen, vermerkten sie nur ihre Wahl. Da die Schüler A und B nur die erste Aufgabe bearbeiten konnten, wird die Analyse des Prototyps B zeigen, ob die Aufgabenstellungen prinzipiell missverständlich formuliert waren.

Während B *Photomath* erst nach knapp 15 Minuten verwendete, um eine Aufgabe einzuscannen, fotografierte A erst nach 20 Minuten die erste Gleichung mit der App ab, nutzte sie aber direkt, um die einzelnen Schritte abzuschreiben (vgl. Transkript 1: 66, 85). B verglich erst nach 33 Minuten die Lösungsschritte mit der App (vgl. Transkript 1: 124). C und D nutzen *Photomath* von Beginn an, D vor allem, um die Lösung zu übertragen (Transkript 2: 1 f., 5). Die Schüler gaben im Vorfeld an, sich die App heruntergeladen und mit ihren Funktionen vertraut gemacht zu haben. Die Nutzung der App lässt darauf schließen, dass sie sich nur die Scanfunktion der App angesehen haben.

Aufgrund der beschriebenen Schwierigkeiten wurden folgende Änderungen vorgenommen:

Aufgabe 1

a) Löse die Gleichungen. Vergleiche deinen Lösungsweg mit dem von Photomath. Was fällt dir auf?

(1) $\frac{1}{2} x^2 - 8 = 0$ (2) $6 (x - 2) = 4 - x^2$

b) Forme die Gleichung in die Scheitelpunktsform um ($a (x - d)^2 + e$).
Welche Informationen kannst du über den zugehörigen Graphen entnehmen?

$f(x) = 5x^2 - 20x + 20 + 2$

Ich habe Photomath verwendet,
- ❑ *um die Aufgabe zu lösen*
- ❑ *um das Ergebnis zu überprüfen*

Abbildung 9

Der Arbeitsaufwand wurde angesichts der vorherigen Bearbeitungszeit verringert. Außerdem wurde klar zwischen der Interpretation und der Lösung der Gleichungen unterschieden. Die Verwendung der App setzte im ersten Durchgang zum Teil zu spät ein, weshalb sie in Teilaufgabe a) integriert wurde. Da die Schüler bei der Bearbeitung stets aus der Normalform den Scheitelpunkt ableiten wollten, wurde der Arbeitsauftrag dahingehend konkretisiert und die allgemeine Scheitelpunktform als Hinweis angegeben.

Durch die Implementierung der App-Nutzung in der Aufgabenstellung wurden auch die Antwortmöglichkeiten des Single-Choice-Feldes angepasst.

Die zweite Aufgabe blieb, wie bereits beschrieben, erhalten. Die dritte Aufgabe wurde jedoch um eine Gleichung verkürzt, die Formulierungen aber beibehalten. Ansonsten veränderte sich noch die Darreichungsform der Aufgaben. Die Schüler erhielten bei Prototyp A alle fünf Aufgaben, im zweiten Durchgang nur die ersten drei Aufgaben, die didaktische Reserve hätte dann im Bedarfsfall nachgereicht werden können.

9.6. Optimierung des Lehr-Lernarrangements (Prototyp C)

Während der zweiten Erhebung konnten alle drei Aufgaben von den Schülern bearbeitet werden, allerdings wurden die eingeplanten 45 Minuten um fünf Minuten überschritten. Die Namen der Schüler wurden analog zur ersten Erhebung mit Buchstaben von E bis H anonymisiert.

Die Formulierung und somit die Erfassung der Aufgabenstellung bereiteten den Schülern wenig Schwierigkeiten. Unsicherheiten traten lediglich dahingehend auf, dass den Schülern die Fragestellung „*was fällt dir auf?*“ zu unpräzise gestellt war. Hierzu tauchten Rückfragen auf, die nach der Beantwortung jedoch keine weiteren Probleme aufwarfen (vgl. Transkript 3: 2 und Transkripts 4: 17). Auch die Formulierung des Aufgabenteils b) war verständlich formuliert, es gab eine Rückfrage von G.

31	17:22	G	Sollen wir jetzt einfach hinschreiben, welche Informationen man da entnehmen kann. Also ob der fallend ist oder sowas oder… [2 Sek.]
32	17:28	I	Also zum Beispiel: Wo ist denn der Scheitelpunkt, -- ist der gestreckt oder gestaucht
33	17:32	G	Jaja ok.

Tabelle 5

Die Umformung der Gleichungen gelang nicht problemlos, was zum einen in mangelnden Kopfrechen-Fähigkeiten (vgl. Transkript 3: 7-14) zum anderen in Rechen- oder Vorzeichenfehlern begründet war (vgl. Transkript 3:23-29).

Der Arbeitsauftrag der zweiten Aufgabe wurde ebenfalls verstanden, nur von G wurde eine Rückfrage gestellt: „*Wir sollen uns ja aufschreiben, was uns da auffällt, ich habe jetzt einfach die Graphen aufgemalt*“ (Transkript 3: 71). Die Aufgabe wurde angemessen von allen Schülern bearbeitet.

Die Formulierung der letzten Aufgabe müsste jedoch konkretisiert bzw. verändert werden. Im Gegensatz zur ersten Gruppe wurden die Gleichungen schriftlich bearbeitet. Den Schülern war allerdings unklar, was sie unter dem sinnvollsten Verfahren verstehen sollten: „*Ja hier sinnvolles Verfahren. Ja hätte ich hier jetzt hier da einfach das x weggenommen -- dann steht das ja wieder da*“ (Transkript 5: 19). Die Formulierung könnte stattdessen folgendermaßen abgewandelt werden: *Wähle jeweils das zeitsparendste Verfahren aus und begründe deine Wahl*. Eine Alternative wäre ebenfalls: *Überlege, mit welchem Verfahren du jeweils die wenigsten Rechenschritte benötigen würdest. Löse die Gleichungen und begründe deine Wahl.*

Aufgabenteil c wird sehr ausführlich und nur ein Mal undifferenziert beantwortet: „*p-q-Formel, weil ich es verstehe*“ (Schülerlösung E).

Im Vergleich zu Prototyp A stieg die App-Nutzung bei Prototyp B deutlich an. Zusätzlich veränderte sich auch die Qualität der Verwendung. G und H nutzten innerhalb der ersten zwei Minuten bereits die Taschenrechnerfunktion der App (vgl. Transkript 4: 1 f.). Im Vergleich zu Prototyp A wurde *Photomath* von allen Schülern nur im Sinne der Aufgabenstellung verwendet. Bei den Aufgaben 1 und 3 lösten die Schüler die Gleichungen zunächst selbst und gebrauchten die App lediglich für Vergleiche oder, um den Taschenrechner zu nutzen (vgl. Transkript 3: 22, 58, 74 sowie Transkript 4: 12, 25). Drei Schüler gaben zwar an, die App seit Vorstellung des Projekts heruntergeladen und damit die Hausaufgaben überprüft zu haben, trotzdem nutzte nur H alle Funktionen der App selbstständig.
Entsprechend der Nutzung müssten auch die Antwortmöglichkeiten unter den Aufgaben angepasst werden. *Photomath* wurde überwiegend als Taschenrechner verwendet, sodass ein solches Item auch anzukreuzen sein sollte. Aufgrund der Erfahrungen bezüglich der App-Nutzung während der Prototypen A und B sollten bei einer erneuten Durchführung die Funktionen der App vorab erläutert werden.

10.Ergebnisdarstellung

Innerhalb dieses Kapitels werden zunächst die Ergebnisse der Fragebogenauswertung, anschließend eine Bilanz der Lehr-Lernumgebungen dargestellt. Darauf folgt die Beantwortung der Forschungsfrage bzw. der Hypothesen. Abgeschlossen wird die Ergebnisdarstellung durch eine Reflexion der Erkenntnisse und des eigenen Handelns.

10.1. Vorstellung der Ergebnisse der Fragebogenauswertung

Die Ergebnisse der Fragebogenauswertung gliedern sich in die Feedbackmöglichkeiten der Schüler zur App-Nutzung und in die angehängten Fragebögen.
Die Rückmeldungen konnten in Form von Single-Choice-Antwortformaten nach jeder Aufgabe auf den Aufgabenblättern abgegeben werden. Der Fragebogen wurde wie bereits erwähnt, am Ende der Bearbeitung ausgefüllt, wobei dieser sich aus einer Mischung von offenen und geschlossenen Frageformen zusammensetzte.

Während die Schüler in Prototyp A durchweg angaben, die erste Aufgabe mit Hilfe von *Photomath* gelöst zu haben, benötigte in Prototyp B lediglich G die App dafür. Die anderen Schüler gaben an, mit *Photomath* nur das Ergebnis überprüft zu haben. Allein D erreichte im ersten Durchgang die dritte Aufgabe und verwendete die App dort ebenfalls zum Lösen der Gleichungen. Bei der Durchführung von Prototyp B gaben zwar fast alle Schüler an, *Photomath* zum Lösen verwendet zu haben, ergänzten jedoch, „*um die Wurzel auszurechnen*" (Schülerlösung E). Letztlich fand nur der Taschenrechner der App Anwendung, weil die Ergebnisse eigenständig erarbeitet wurden.
Es gaben zwei Schüler an, vor dem Projekt bereits mit *Photomath* gearbeitet zu haben.
Die Auszählung der geschlossenen Antwortformate der Fragebögen hat ergeben, dass einem Schüler die App bereits vor Projektbeginn bekannt war. Der andere Schüler verwendete sie seit der Vorstellung des Projekts in der Klasse. Alle Schüler gaben an, dass ihnen die App bei der Bearbeitung helfe. Fast alle Schüler fühlten sich beim Verstehen der Aufgaben durch *Photomath* unterstützt. Nur bei einem Schüler des zweiten Durchgangs beschleunigte die App die Bearbeitung der Aufgaben. Alle Teilnehmer haben vor, *Photomath* in Zukunft häufiger zu nutzen, wobei zwei Schüler sich gegen eine Nutzung im Unterricht aussprachen.

Die frei formulierten Antworten bezogen sich auf positive sowie negative Eigenschaften der App und sonstige Anmerkungen zum Projekt bzw. zu den gestellten Aufgaben. Die Erklärungen der Schüler wurden zu inhaltlichen Kategorien zusammengefasst und nach Häufigkeit des Auftretens sortiert.

Die Hälfte der Schüler lobte das Ausdifferenzieren der Lösung in einzelne Teilschritte und die einsehbaren Erklärungen. Knapp ein Drittel der Schüler befürwortete die Auswahl an verschiedenen Lösungsverfahren, jeweils ein Viertel das schnelle Überprüfen und Scannen mit Hilfe der App. Ein Schüler empfand die vielen verschiedenen Funktionen der App als positiv, ein anderer das schnelle Lokalisieren der eigenen Fehler.

Einen Verbesserungsbedarf sah nur die Hälfte der Schüler. Diesen lokalisierten sie zum einen im Bereich der Erklärungen, zum anderen fänden sie es wünschenswert, Textaufgaben mit der App lösen zu können. Des Weiteren wurde „*das Beschreiben von bestimmten Zeichen*“ (Fragebogen 1) angegeben, was ebenfalls auf eine Verbesserung der Erklärungen deuten könnte.

Bei den sonstigen Anmerkungen zum Projekt bzw. zu den Aufgaben ist auffällig, dass lediglich ein Schüler des ersten Durchgangs eine Anmerkung machte. Die Aufgaben wurden als schwer empfunden, aber „*gut und sachlich*“ (Fragebogen 1) erklärt. Die Hälfte der Schüler der zweiten Erhebung gab eine Rückmeldung zu den gestellten Aufgaben, die sie als angemessen und verständlich empfanden. Die erhaltene Unterstützung beschrieben ebenfalls zwei Schüler als verständlich. Ein Schüler merkte an, dass die Verwendung von *Photomath* im Unterricht die Gefahr mit sich bringe, dass einige Schüler die App nur zum Abschreiben verwenden könnten.

10.2. Vorstellung der Ergebnisse der Lehr-Lernarrangements

Ein Problem, welches die erste Durchführung vordergründig dominierte, kann in der Bestimmung der Scheitelpunktform verortet werden. Die Gleichungen der ersten Aufgabe mussten in diese Form überführt werden, um den Scheitelpunkt der zugehörigen Graphen bestimmen zu können. Die Schüler hatten unter anderem vergessen, wie sie Informationen über den Graphen aus den Gleichungen entnehmen können (vgl. Transkript 2: 5-10). Sie verwechselten die angegebene Gleichung mit der Normalform, aus welcher zwar Informationen über den Graphen entnommen werden können, die allerdings keine Auskunft über das Extremum erteilt (vgl. Transkript 1: 21, 32, 87). Andernfalls konnten sie sich nicht mehr genau an den Aufbau der Scheitelpunktform erinnern bzw. die angegebenen Gleichungen nicht selbstständig überführen (vgl. Transkript 1: 33-38, 72, 93 f.). Während der zweiten Erhebung hatte E die Gleichung bereits in die Scheitelpunktform umgeformt, wobei ihr nicht bewusst war, dass sie so den Scheitelpunkt bestimmen konnte.

30	11:23	E	Also ich muss die ja nur umformen, also quasi so [Aufgabe 1 b), *zeigt auf die in die Scheitelpunktform umgeformte Gleichung*]
31	11:24	I	Hmh [bestätigt]
32	11:25	F	Und dann – die Informationen, die ich quasi hieraus [*zeigt auf die ursprüngliche Gleichung*] entnehmen kann.

33	11:32	I	Genau, die Informationen, die du aus der Gleichung entnehmen kannst.
34	11:34	E	Soll ich das dann auch umrechnen, damit ich dann auch den Scheitelpunkt raus hab?
35	11:40	I	Was sagt dir denn äh – Wie würdest du denn den Scheitelpunkt herausbekommen?
36	11:44	E	Äh hier, wie heißt es noch mal? Quadratische Ergänzung
37	11:47	I	Ja was willst du dann machen?
38	11:49	E	Dann halt die 20x teilen, halt durch 10 -- also die Hälfte, dann halt 10. Das hoch 2, das auf beide Seiten schreiben – und dann halt ja --
39	12:00	I	Und was hast du jetzt gerade gemacht mit der Aufgabe? Du hast die ja schon irgendwie umgeformt oder?
40	12:04	E	In die Scheitelpunktform.
41	12:05	I	Genau. Was sagt dir denn die Scheitelpunktform? – Normalerweise?
42	12:10	F	Scheitelpunkt.
43	12:12	E	Echt?

Tabelle 6

Diese Fehler können sowohl im Bereich des funktionalen Denkens, als auch im Gleichungsverständnis begründet sein. Bezogen auf die aufgebauten Vorstellungen zu Funktionen ist es möglich, dass die Schüler die verschiedenen „Gesichter" einer Funktion nicht miteinander in Verbindung bringen konnten (vgl. Leuders & Bruder 2005: 4). Sie verknüpften den Graphen nicht mit der zugehörigen Gleichung, die ihn beschreibt. Die Problematik könnte außerdem auch (gleichzeitig) auf Fehlvorstellungen beruhen, die das Gleichungs- bzw. Variablenverständnis betreffen, sodass eine Überführung einer Gleichung in eine andere überfordernd wirkte. Der Aufbau blieb für sie unverstanden (vgl. Nitsch 2014: 8 ff.). Ebenso kann die Hürde beim Übergang zum Veränderlichenaspekt gesehen werden (vgl. Hefendehl-Hebeker & Rezat 2015: 135 f.).

Des Weiteren fiel es vielen Schülern schwer, auf ihr Wissen bezüglich der binomischen Formeln zuzugreifen. Es ist auch möglich, dass dieses nur fehlerhaft ausgebildet ist (vgl. Strecker 1999: 2 f.). Das Wissen benötigten sie vor allem bei der Umformung in die Scheitelpunktform. Besonders fehleranfällig war das Prinzip der quadratischen Ergänzung (vgl. Transkript 1: 47-55). Die Schüler wussten teilweise nicht, welche Teile der Gleichung sie innerhalb der binomischen Formel zusammengefasst hatten, bzw. welche für den Aufbau einer solchen Form noch fehlten (vgl. Transkript1: 98-102, 102). Während des zweiten Durchgangs bereitete die Anwendung der quadratischen Ergänzung keine Probleme. Lediglich das Aufstellen einer binomischen Formel innerhalb einer Klammer stellte für einen Schüler eine Hürde dar (vgl. Transkript 3: 62-67).

Bei manchen Fehlern sind die möglichen Ursachen jedoch schwieriger zuzuordnen. B wollte entweder nur auf einer Seite der Gleichung radizieren oder sie hat nicht bedacht, welche Folgen das Wurzelziehen auf die Form der Gleichung gehabt hätte. Möglicherweise wurde ihre Aussage einfach falsch interpretiert.

93	23:11	B	Ich würde die 16. Also die Wurzel ziehen, also vier. Und dann sind es ja $(x+4)^2$ wäre x hoch 2--
94	23:16	I	Ähhm könnt ihr aus allem jetzt die Wurzel ziehen? Bringt euch das was? -- Wenn ihr da jetzt stehen hättet $x^2= -6x+16$? Kann man daraus die Wurzel ziehen? Bringt einem das was?

Tabelle 7

Ein solches Vorgehen könnte im ersten Fall auf das unzulässige Linearisieren nach MALLE zurückzuführen sein, da der „*Ausdruck in Teile zerlegt und die Operation der Reihe nach auf die einzelnen Teile angewandt [wurde]*" (Malle 1993: 175).
Auch Strategien zum Umformen und Zusammenfassen von Termen, wie das Ausklammern, konnten von manchen Schülern nicht vollständig reaktiviert werden.

116	30:12	B	Ich würde die 5 ausklammern […]
117	30:21	B	Ich würde dann sagen x-5 -- und dann zum Quadrat?
118	30:28	I	Ähm wie geht denn Ausklammern?
119	30:31	B	Ähmm [3 Sek] [l*acht*] das ist gemein [*lacht*]. Ich denke, also weil 5x, da steht ja eigentlich quasi so ein Mal zwischen. Deshalb 5geteilt durch x und 5 geteilt durch 20 [$5x^2$-20 x+20=-2] [2 Sek.]
120	30:47	I	Oder 20 geteilt durch 5.
121	32:32	B	[*vergisst nach dem Zusammenfassen in die binomische Formel, den Rest der Gleichung, muss durch Zeigen darauf hingewiesen werden*]

Tabelle 8

Außerdem scheint es manchmal unklar zu sein, welche Teile eines Terms die Seiten der Gleichung wechseln dürfen oder wie man sie zusammenfasst (Transkript 4: 6-9, 23 und Transkript 5: 11-15). Dies kann im Zusammenhang mit Funktionsgleichungen stehen, da Termumformungen in diesem Fall nur auf einer Seite des Gleichheitszeichens durchgeführt werden. Andernfalls könnte ein fehlendes Verständnis des Gleichheitsbegriffs zugrunde liegen (vgl. Eigel 2011: 46). So könnte auch die Grundidee von Gleichungen nicht abgerufen werden (vgl. Barzel & Holzäpfel 2011: 5). Folgende Unsicherheit bei der

Termumformung könnte in einem mangelnden Verständnis von Operations- oder Vorzeichen begründet sein.

137	35:20	A	Ich weiß nicht, wie ich darauf kommen sollte. Achso. Durch die 5 vorne?
138	35:23	B	Genau.
139	35:25	A	Erst nur durch 5 oder durch -5?
140	35:27	B	Durch 5. Ist ja normal [es steht eine positive 5 vor der Klammer]

Tabelle 9

Auffällig war in beiden Durchgängen, dass die Schüler die Begrifflichkeiten und Funktionen verschiedener Gleichungen nicht sicher angeben und zuordnen konnten. Sie zeigten Unsicherheiten bei der Umformung der Gleichungen und den mit ihnen verbundenen Strategien. Neben den zuvor genannten Problemen wurde im zweiten Durchgang von zwei Schülern möglicherweise eine Strategie der Addition bzw. Subtraktion übergeneralisiert, indem sie die Null und nicht die Eins als neutrales Element wählten (vgl. auch Transkript 5: 28-36).

1	00:45	E	0 durch 2? Was ist 0 :2?
2	00:45	H	Null.
3	00:46	F	Null.
4	00:47	E	Ach ja.
5	00:55	E	Ja dann – das hat doch dann gar keine Lösung [Aufgabe 3a]
6	01:03	H	Da steht ein x ne.
7	01:05	E	Ja aber dann x ist 0
8	01:06	H	Da steht -ein – x. Stell dir einfach vor, davor würde eine 1 stehen
9	01:09	E	Achjaa

Tabelle 10

Im Bereich des funktionalen Denkens kann festgehalten werden, dass keine sichere Verknüpfung zwischen der graphischen Darstellung von Funktionen und ihrer zugehörigen Gleichung besteht (vgl. Transkript 1: 142 ff., 109). Die Begrifflichkeiten Hoch- und Tiefpunkt bzw. Schnitt- und Scheitelpunkt wurden während der ersten Erhebung nicht stabil verwendet und miteinander vertauscht (vgl. Transkript 1: 8, 56-65). Wie der Schnittpunkt mit der y-Achse zu berechnen ist, wusste keiner der Schüler, sie konnten ihn jedoch aus der Normalform ablesen. Sie gaben an, für die Berechnung eine Formel verwendet zu haben (Transkript 4: 27 f. und Transkript 1: 145-150). Dies und im Besonderen die letzte Aussage deuten auf fehlende Grundvorstellungen im Bereich der Funktionen hin, da die Schüler sich nicht vorstellen konnten, welche Voraussetzungen für den Schnittpunkt mit der y-Achse erfüllt sein müssen.

Neben den genannten Problemen war bei manchen Schülern das Wissen zu Operationen mit Brüchen nicht vollständig aktivierbar bzw. sie zeigten Unsicherheiten bei der Größenvorstellung von Brüchen (Transkript 1: 14 f., 25-30). Aus diesem Grund konnten Erklärungen von *Photomath* beispielsweise erst nachträglich verstanden werden (vgl. Transkript 2: 11 f.).

Die dargestellten Schwierigkeiten zeigen, dass den Schülern ein Transfer zwischen quadratischen Gleichungen und Funktionen schwerfiel. Die Schüler des ersten Durchgangs waren mehrheitlich nicht fähig, den Scheitelpunkt einer quadratischen Funktion zu bestimmen (vgl. Klinger 2018: 368).

In Bezug auf die Nutzung von *Photomath* konnte beobachtet werden, dass die App im zweiten Durchgang deutlich häufiger und effektiver eingesetzt wurde. Während D die App zwar häufig, aber nur zum unverstandenen Abschreiben der Lösungswege nutzte (vgl. Transkript 2: 3, 6, 21), verglich B den eigenen Lösungsweg mit dem von *Photomath* erstmals und einmalig nach über 33 Minuten (vgl. Transkript 1: 124). A nutzte die App erst nach 20 Minuten, um einen Lösungsweg abzuschreiben. Danach verwendete sie nur wenige Male die App, um den Lösungsweg nachvollziehen zu können, verstand die Lösung durch Faktorisieren aber nicht (vgl. Transkript 1: 85, 92, 106 f.). Nachdem sie auf die Möglichkeit hingewiesen wurde, ein anderes Verfahren zu wählen, benutzte sie die App nicht mehr.

Innerhalb der zweiten Erhebung wurde *Photomath* vorrangig als Taschenrechner oder gemäß ihres Zwecks für die Überprüfung der Ergebnisse bzw. der Fehlersuche, eingesetzt. Während H alle Funktionen der App von Beginn an beherrschte – Scannen, Methodenwahl und Taschenrechner –, nutzten E und F die App lediglich zum Abgleich der Ergebnisse (vgl. Transkript 3: 15, 22, 24). G hatte nach eigener Aussage noch nicht mit *Photomath* gearbeitet, wusste aber intuitiv den Taschenrechner der App zu bedienen und erkundigte sich für Fragen bei H (vgl. Transkript 4: 2, 12). Obwohl fast alle Schüler im Vorfeld erklärten, die App nach Vorstellung der Studie heruntergeladen zu haben und mit ihren Funktionen vertraut zu sein, beschränkte sich dies meist auf das Scannen der Aufgaben. Bis auf H mussten alle Schüler auf die Möglichkeit zur Auswahl eines alternativen Lösungsverfahrens hingewiesen werden. Es wurden auch keine Strategien zur Nutzung der App entwickelt oder Funktionen durch Ausprobieren entdeckt (vgl. Barzel & Roth 2018: 16). B kannte die Funktionen der App möglicherweise schon oder sie entdeckte den Menüpunkt *Andere Methoden anzeigen*, nutzte ihn jedoch nicht weiter (vgl.

Transkript 1: 71, 78). Selbst E und F, die mit der App nach eigenen Angaben ihre Hausaufgaben kontrollierten, waren sich über den Funktionsumfang von *Photomath* nicht im Klaren. Die anderen Möglichkeiten hätten sie nicht interessiert: „*Ich wollt nur wissen, ob das [Ergebnis] richtig ist*“ (Transkript 3: 21). Diese Erkenntnisse widersprechen der Annahme, die das Herunterladen der App mit einer Implementierung in ihrer Lebenswelt verbindet (vgl. Klinger 2019 a).

Relativ häufig wurden allerding die graphischen Lösungen der Gleichungen betrachtet und soweit erkennbar auch für die Deutung der Ergebnisse oder die Überprüfung des Verlaufs verwendet (vgl. Transkript 2: 4, 23, 54 und Transkript 3: 46, 74). Auch wenn die Graphen ohne Kommentierung abgebildet werden, macht es den Anschein, als ob sie den Schülern trotzdem beim Verstehen der Ergebnisse bzw. beim Nachvollziehen der Lösungen behilflich sein konnten (vgl. Barzel & Roth 2018: 19).

10.3. Beantwortung der Forschungsfrage

Mit Hilfe der dargestellten Ergebnisse werden zunächst die Hypothesen verifiziert und abschließend die Forschungsfrage beantwortet.

(1) Die App kann sinnvoll in produktive Übungsaufgaben integriert werden.

Als Voraussetzung für produktives Üben gilt es, dementsprechende Übungsaufgaben zu konzipieren. In Kapitel 9.4. wurde ausführlich dargelegt, warum es sich bei den erstellten Aufgaben um produktive Übungsaufgaben handelt. Die Lernumgebung war in Prototyp A noch nicht an die Lerngruppe angepasst. Prototyp B war hingegen besser auf die Bedürfnisse der Schüler angepasst, wodurch die App im Sinne des produktiven Übens verwendet wurde.

(2) Die Nutzung der App hilft den Schülern, die algebraische und die graphische Darstellung von quadratischen Gleichungen zu vernetzen.

Diese Hypothese lässt sich nicht vollständig belegen. Die Schüler haben, wie dargelegt, *Photomath* für die Betrachtung der Graphen verwendet und für die Überprüfung ihrer Ergebnisse genutzt. Auch die Informationen über die abgeleiteten Graphen wurden mit *Photomath* verglichen. Die graphische Darstellung bzw. Lösung von Gleichungen war zumindest den Schülern des zweiten Durchgangs bekannt, weshalb nicht gesagt werden kann, dass ihre Vernetzung im Bereich der quadratischen Gleichungen gesteigert wurde.

Es lässt sich annehmen, dass die Graphen vielmehr eine Verknüpfung zwischen Funktionen und quadratischen Gleichungen bewirken können.

(3) *Die Nutzung der App verhilft zum schnelleren Arbeiten, da sie die Schüler entlastet.*

Die dritte Hypothese lässt sich klar verneinen. Kein Schüler gab an, durch die Nutzung der App einen zeitlichen Vorteil erwirkt zu haben. Stattdessen hatte die Nutzung bei einem Teil der Schüler einen gegenteiligen Effekt. Das Nachvollziehen des faktorisierenden Lösungsverfahrens hat während des ersten Durchgangs viel Zeit gekostet. Dieses Problem ist auf fehlende Kenntnisse bezüglich der unterschiedlichen Methoden zurückzuführen.

(4) *Die Schüler verwenden die App nicht nur, um den Lösungsweg abzuschreiben.*

Nur ein Schüler verwendete die App zum reinen Abschreiben der Ergebnisse. Alle anderen nutzten *Photomath* lediglich zur Berechnung und Kontrolle der Ergebnisse bzw. um anschließend ihre Fehler zu lokalisieren.

Basierend auf diesen Antworten folgt die Beantwortung der Forschungsfrage.

Kann Photomath so in den Unterricht integriert werden, dass Schüler das Lösen quadratischer Gleichungen produktiv und nachhaltig üben?

Die Studie konnte zeigen, dass *Photomath* so in den Unterricht integriert werden kann, dass die Schüler das Lösen quadratischer Gleichungen produktiv und nachhaltig üben. Die Auseinandersetzung mit der vierten Hypothese zeigt, dass die App größtenteils nicht aus Motiven wie Faulheit verwendet wurde sondern, um eigene Lösungswege zu prüfen. Auch wenn die Bearbeitung der Aufgaben durch die Verwendung von *Photomath* nicht beschleunigt wurde, hat dies keinen Einfluss auf die Nachhaltigkeit des Übens.

10.4. Diskussion der Ergebnisse

Zu dem Umfang der Studie ist vorweg zu nehmen, dass die Ergebnisse der Erhebung nur eine Stichprobe darstellen und daher nicht repräsentativ sind.

Dies bedeutet beispielsweise auch, dass die Verifizierung der Hypothesen relativiert werden müssen. Innerhalb der Ergebnisdarstellung konnte festgehalten werden, dass die Verwendung von *Photomath* die Bearbeitung von Aufgaben nicht beschleunigen konnte.

Dieser Umstand ist jedoch zum Teil darauf zurückzuführen, dass nur zwei Schüler des Kurses *Photomath* vor dem Projekt kannten. Daraus kann nicht verallgemeinernd abgeleitet werden, dass der Kenntnisstand an anderen Schulen oder bereits in anderen Kursen oder Stufen ähnlich ist.
Es wäre nach Erkennen dieses Umstandes sinnvoll gewesen, eine Einführungsstunde für die Nutzung der App zu konzipieren. Dies war aufgrund der zeitlichen Vorgaben der Schule jedoch nicht möglich. Es war daher eingeplant gewesen, mit den Schülern vor Beginn der Bearbeitung, die verschiedenen Funktionen der App durchzusprechen. Die Schüler mussten allerdings aus ihrem ca. fünf Minuten entfernten Klassenraum abgeholt werden. Diese Zeit ging von den sowieso knapp bemessenen 45 Minuten ab. Aus diesem Grund wurde den Angaben der Schüler vertraut, sich mit der App bereits auszukennen. Aus den aufgetretenen Schwierigkeiten ist allerdings abzuleiten, dass die Schüler nicht in der Lage waren, die Funktionen der App selbstständig zu entdecken und zu nutzen. Auf eine Einführung dürfte innerhalb des unterrichtlichen Gebrauchs auf keinen Fall verzichtet werden.

Im Vergleich zu der Bearbeitung des Prototyps A, traten bei Prototyp B deutlich weniger Probleme bezüglich des Verständnisses der Aufgabenstellung auf. Dazu ist anzumerken, dass Prototyp A in der ersten Woche nach den Weihnachtsferien durchgeführt wurde. Kurz vor den Ferien wurde mit dem Thema quadratische Funktionen begonnen. Der fehlende Transfer der ersten Lerngruppe kann daher nicht nur auf fehlendes Verständnis, sondern auch auf fehlende Übung während der Ferien zurückgeführt werden (vgl. Winter 1984:7). Des Weiteren wird auch im verwendeten Mathebuch eine thematische Trennung von quadratischen Funktionen und Gleichungen vorgenommen, sodass den Schülern das Verknüpfen der Thematik auch aus diesem Grunde schwerfallen könnte (Klinger 2018: 369).

Im Vergleich dazu wurde der Schwierigkeitsgrad bei Prototyp B verringert, indem die quadratischen Gleichungen zunächst nur gelöst werden mussten. Eine Umformung in die Scheitelpunktform war ausschließlich bei einer Gleichung nötig. Außerdem erhielten die Schüler weiterhin noch eine Hilfestellung, durch die allgemeine Form der Scheitelpunktform. Davon abgesehen hatten die Schüler am Tag zuvor eine Klassenarbeit über quadratische Gleichungen geschrieben, weshalb ihr Wissensstand bezüglich des Lösens und Umformens, im Vergleich zu der ersten Schülergruppe, auf einem viel höheren Niveau gewesen sein dürfte.

Zusätzlich wurde bei der Durchführung von Prototyp A der Eindruck gewonnen, dass die Schüler alle nötigen Informationen aus der Normalform der quadratischen Gleichung ablesen wollten. Dort wurde seitens der Interviewerin unnötig starr auf das Aufstellen der Scheitelpunktform bestanden. Dies hätte immer noch geschehen können, wenn nur noch der Scheitelpunkt zu bestimmen gewesen wäre. Die verlangsamte Bearbeitung und Verwirrung der Schüler kann also auch auf das versteifte Festhalten an der Scheitelpunktform zurückzuführen sein. Dieses Verhalten hat der Entwicklung vielfältiger Lösungen im Wege gestanden.
Zusätzlich ist es denkbar, dass die Übungssituationen innerhalb des Unterrichts zwar in reale Kontexte eingebettet waren, jedoch häufig nur die Anwendung einzelner Schemata geübt bzw. automatisiert wurde und eine Verknüpfung verschiedener Umformungen die Schüler aus diesem Grund zusätzlich verunsicherte.

Abschließend lässt sich noch festhalten, dass die Konzeption des Prototyps A zeigte, dass es schwierig ist, Aufgaben für eine unbekannte Lerngruppe zu konstruieren, selbst wenn diese mit dem Lehrer abgesprochen wurden. Außerdem kann rückblickend festgestellt werden, dass versucht wurde, (zu)viele verschiedene Schwierigkeiten oder Aspekte des produktiven Übens innerhalb der Aufgaben zu integrieren. Eine weniger schwierige Konstruktion der Gleichungen, getreu dem Motto „weniger ist mehr“, hätte möglicherweise die Stärken der App besser zum Vorschein bringen können.

11. Fazit

Die Erhebung hat gezeigt, dass es sich bei *Photomath* um eine App handelt, die durchaus sinnvoll in den Mathematikunterricht integriert werden kann. Um mit der App nicht nur Algorithmen zu trainieren, sondern produktiv zu üben, müssen die Aufgaben dementsprechend konzipiert sein. Durch das Einfügen reflektierender Arbeitsaufträge wäre ein Abschreiben der Lösungswege nicht zielführend, weil ein Nachdenken bzw. die Auseinandersetzung mit der Aufgabe erforderlich sind.
Alternativ könnten Aufgaben, wie sie in der didaktischen Reserve dargestellt wurden, konzipiert werden. Die Nutzung von *Photomath* trägt bei solchen Aufgaben lediglich zur Beschleunigung der Lösungsfindung bei, indem Ideen schnell auf ihre Richtigkeit überprüft werden können und nicht händisch berechnet werden müssen. Nur so können Lernfortschritte für die Schüler generiert werden.

Besonders interessant wäre es, den Nutzen von *Photomath* bei Modellierungsaufgaben zu testen. Die App kann als Hilfsmittel verwendet werden, während die Schüler sich mit realen mathematischen Problemen auseinandersetzen. Aufgrund der zahlreichen Bearbeitungsschritte können umfangreiche Modellierungsaufgaben selten in den Unterricht aufgenommen werden. Häufig ist dies nur in Projektwochen möglich. Photomath könnte in solchen Situationen den Einsatz auch im regulären Mathematikunterricht ermöglichen.

Das Potential von *Photomath* wird jedoch noch nicht vollständig ausgeschöpft. Um die kostenintensive Anschaffung von CAS-Taschenrechnern abzulösen, müsste beispielsweise das Erstellen von Wertetabellen oder auch das algebraische Lösen von Potenzfunktionen ermöglicht werden. Ansonsten wäre ein kombiniertes Arbeiten mit verschiedenen Apps möglich, die sich jedoch noch nicht miteinander synchronisieren lassen.
Außerdem könnten die einzelnen Lösungsschritte verständlicher bzw. weniger fachsprachlich formuliert bzw. Übungsaufgaben oder Kommentierungen der grafischen Lösung eingebunden werden.
Des Weiteren ist zu berücksichtigen, dass von der Nutzung der App nicht auf das Verständnis der Verwendung oder auf die Kenntnis der gesamten Funktionen geschlossen werden kann. Selbst in der „Generation Smartphone“ kann eine Einführung in die Funktionen der App notwendig sein.

12.Literaturverzeichnis

Aebli, Hans (2006): Zwölf Grundformen des Lehrens. Eine Allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage. Medien und Inhalte didaktischer Kommunikation, der Lernzyklus. Klett-Cotta: Stuttgart.

Barzel, Bärbel / Roth, Jürgen (2018): Bedienen – Problemlösen – Reflektieren. Strategisch arbeiten mit digitalen Werkzeugen. In: Mathematik lehren 211. S. 16-19.

Barzel, Bärbel / Ball, Lynda / Klinger, Marcel (2019): Students`self-awareness of their mathematical thinking: Can self-assessment be supported through CAS integrated learning apps on smartphones? In: Aldon, G. / Trgalova J. (Hrsg.). Digital technology to teach, learn and assess mathematics: Featuring extended selected papers of ICTMT 13. Springer.

Borromero Ferri / Blum, Werner (2011): Vorstellungen von Lernenden bei der Verwendung des Gleichheitszeichens an der Schnittstelle von Primar- und Sekundarstufe. In: Haug, R. / Holzäpfel, L. (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Vorträge auf der 45. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 21.02.1011 bis 25.02.1011 in Freiburg. Band 1 und 2. WTM: Münster. S. 127-130.

Bruder, Regina (2008): Üben mit Konzept. In: Mathematik lehren 147. S. 4-11.

Büchter, Andreas / Henn, Hans-Wolfgang (2010): Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie. Springer Spektrum: Heidelberg.

Drijvers, Paul / Barzel, Bärbel (2011): Gleichungen lösen mit Technologie. Verschiedene Werkzeuge, verschiedene Sichtweisen. In: Mathematik lehren 169. S. 54-57.

Drüke-Noe, Christa / Siller, Hans-Stefan (2018): Aufgaben als Aufgabe. In: Mathematik lehren 209. S. 2-8.

Eigel, Stefan (2011): Nicht nur das Ergebnis prüfen. Aus Fehlern in Gleichungen lernen. In: Mathematik lehren 169. S. 46-48.

Greefrath, Gilbert / Oldenburg, Reinhard / Siller, Hans-Stefan / Ulm, Volker / Weigand, Hans-Georg (2016): Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe. Springer Spektrum: Berlin, Heidelberg.

Hansen, Gerd (2010): Unterstützende Didaktik. Ein Konzept zur Planung und Durchführung von Unterricht an Allgemeinen Schulen und Förderschulen. Oldenbourg Verlag: München.

Herold-Blasius, Raja / Rott, Benjamin (2018): Strategien im Mathematikunterricht. Strategien erkennen und fördern. In: Mathematik lehren 211. S. 2-6.

Hefendehl-Hebeker, Lisa / Rezat, Sebastian (2015): Algebra: Leitidee Symbol und Formalisierung. In: Bruder, R./ Hefendehl-Hebeker, L. / Schmidt-Thieme, B. / Weigand, H.-G. (Hrsg). Handbuch der Mathematikdidaktik. Springer Spektrum: Berlin, Heidelberg. S. 117-148.

Hischer, Horst (2002): Mathematikunterricht und Neue Medien – Hintergründe und Begründungen in fachdidaktischer und fachübergreifender Sicht, Verlag Franzbecker: Hildesheim / Berlin.

Hußmann, Stephan / Laakmann, Heinz (2011): Eine Funktion – viele Gesichter – Darstellen und Darstellungen wechseln. In: Praxis der Mathematik Heft 38 Jahrgang 53. S. 2-13.

ISB, Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung: Mathematikunterricht am Gymnasium. Förderung mathematischer Kompetenzen. Anregungen und Materialien. Abrufbar unter: https://www.isb.bayern.de/download/13586/9_partnerarbeit_quadratische_gleichungen_aufgaben_und_loesungen.pdf (letzter Zugriff: 10.03.2019).

Jahnke, Isa (2017): Tablets im Schulunterricht in Skandinavien. Der Ansatz des Digitalen Didaktischen Design (DDD) für empirische Studien: Designs – in – Practice. In: Bastian, J. / Aufenanger, S. (Hrsg.): Tablets in Schule und Unterricht. Forschungsmethoden und Perspektiven zum Einsatz digitaler Medien. Springer Fachmedien: Wiesbaden. S. 37-61.

Kant, Immanuel (1781): Kritik der reinen Vernunft abgerufen auf: https://korpora.zim.uni-duisburg-essen.de/Kant/aa03/075.html (letzter Aufruf: 10.03.2019).

Kernlehrplan (2004 Kernlehrplan für die Gesamtschule – Sekundarstufe I in Nordrhein-Westfalen. Mathematik. Ritterbach Verlag: Frechen.

Klees, Guido / Tillmann, Alexander (2015): Design-Based Research als Forschungsansatz in der Fachdidaktik Biologie. Entwicklung, Implementierung und Wirkung einer multimedialen Lernumgebung im Biologieunterricht zur Optimierung von Lernprozessen im Schülerlabor. In: Journal für Didaktik der Biowissenschaften (F) 6. S. 91-110.

Klieme, Eckhard / Baumert, Jürgen / Köller, Olaf / Bos, Wilfried (2000): Mathematische und naturwissenschaftliche Grundbildung: Konzeptuelle Grundlagen und die Erfassung und Skalierung von Kompetenzen. In: Baumert, J./Bos, W./Lehmann, R. (Hrsg.): TIMSS/III. Dritte Internationale Mathematik- und

Naturwissenschaftsstudie. Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung. Am Ende der Schullaufbahn. Band 1. Leske + Buderich: Opladen. S. 85-94.

Klingberg, Lothar (1974): Einführung in die Allgemeine Didaktik. Vorlesungen. Volk und Wissen: Berlin.

Klinger, Marcel (2018): Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis. Entwicklung eines Testinstruments und empirische Befunde aus der gymnasialen Oberstufe. Springer Fachmedien: Wiesbaden.

Klinger, Marcel (2019a): „Besser als der Lehrer!" Potenziale CAS-basierter Smartphone-Apps aus didaktischer und Lernenden-Perspektive. In: Pinkernell, G. / Schacht, F. (Hrsg.). Digitalisierung fachbezogen gestalten: Tagungsband der Herbsttagung des Arbeitskreises Mathematikunterricht und digitale Werkzeuge vom 28. bis 29. September 2018 an der Universität Duisburg-Essen. Franzbecker: Hildesheim. Im Druck

Klinger, Marcel (2019 b): Zur Digitalisierung in außerschulischen Lernkontexten: Welche Rolle spielen CAS-basierte Smartphone-Apps wie Photomath und Co? In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2019. WTM-Verlag: Münster. Im Druck.

Klinger, Marcel / Schüler-Meyer, Alexander (2019): CAS oder kein CAS, ist das noch die Frage? Smartphone-basierte Computer-Algebra-Apps brauchen eine geeignete Aufgabenkultur. In: Mathematik lehren 215. Im Druck

Kohnen, Marcus (2011): Individualisierendes Lehren und Lernen anhand einer multimedialen Lernumgebung zum Thema Sonnenschutz. Eine Design-Based Research Studie. Dissertation. Institut für Didaktik der Chemie der Universität Duisburg-Essen.

Ladel. Silke (2017): Ein TAplett für die Mathematik. Zur Bedeutung von Handlungen mit physischen und digitalen Materialien. In: Bastian, J. / Aufenanger, S. (Hrsg.): Tablets in Schule und Unterricht. Forschungsmethoden und Perspektiven zum Einsatz digitaler Medien. Springer Fachmedien: Wiesbaden. S. 301-326.

Lehmann, Eberhard (2001): Vorwort zum Heft: „Gleichungen in der Sekundarstufe 1 mit dem TI-92". In: Herget, W. / Ders. (Hrsg.). Gleichungen in der Sekundarstufe 1 mit dem TI-92. Schroedel Verlag: Hannover.

Leisen, Josef (2004): Konkret-Symbolisch-Abstrakt. Der Wechsel der Darstellungsformen, eine wichtige Strategie im deutschsprachigen Fachunterricht. In: Fremdsprache Deutsch 30. S. 15-21.

Lemmermeyer, Franz (2016): Mathematik a´ la Carte. Quadratische Gleichungen mit Schnitten von Kegeln. Springer Spektrum: Heidelberg.

Leuders, Timo / Prediger, Susanne (2005): Funktioniert`s? – Denken in Funktionen. In: Praxis Mathematik Heft 2 Jahrgang 47. S. 1-7.

Leuders, Timo / Wittmann, Gerald (2006): Produktives Üben im Geometrieunterricht. In: Praxis Mathematik Heft 12 Jahrgang 48. S. 1-7.

Leuders, Timo (2006): Kompetenzorientierte Aufgaben im Unterricht. In: Blum, W. / Drüke-Noe, C. / Hartung, R. / Köller, O. (Hrsg.). Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Cornelsen Skriptor: Berlin. S. 81-95.

Leuders, Timo (2010): Intelligent Üben und Mathematik erleben. In: Ders./ Barzel, B. (Hrsg.). Mathemagische Momente. Cornelsen: Berlin. S. 130-143.

Leuders, Timo / Holzäpfel, Lars (2011):Kognitive Aktivierung im Mathematikunterricht. Unterrichtswissenschaft 39. S.213-230.

Malle, Günther (1993). Didaktische Probleme der elementaren Algebra : Mit vielen Beispielaufgaben. Vieweg: Braunschweig.

Nitsch, Renate (2014): Schülerfehler verstehen – typische Fehlermuster im funktionalen Denken. In: Mathematik lehren Heft 287. S. 8-11.

Oehl, Wilhelm (1970): Der Rechenunterricht in der Hauptschule. Schroedel: Hannover.

Photomath, Website: abrufbar unter: https://photomath.net/de/ (Letzter Aufruf 10.03.19)

Prediger, Susanne (2008): „… nee, so darf man das Gleich doch nicht denken!“ Lehramtsstudierende auf dem Weg zur fachdidaktisch fundierten diagnostischen Kompetenz. In: Barzel, B. / Berlin, T. / Bertalan, D. / Fischer, A. (Hrsg.). Algebraisches Denken. Festschrift für Lisa Hefendehl-Hebeker. Franzbecker: Hildesheim, S. 89-99.

Reinmann, Gabi (2005). Innovation ohne Forschung? Ein Plädoyer für den Design-Based Research-Ansatz in der Lehr-Lernforschung. Unterrichtswissenschaft, 1, 52-69.

Rott, Benjamin (2018): Kleine Änderung mit großer Wirkung. Produktives Üben durch Variation von Aufgaben. In: Mathematik lehren 209. S. 18-21.

Rüede, Christian (2011): Strukturieren von Termen und Gleichungen als Bedeutungskonstruktion. In: Haug, R. / Holzäpfel, L. (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Vorträge auf der 45. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 21.02.1011 bis 25.02.1011 in Freiburg. Band 1 und 2. WTM: Münster. S. 711-714.

Schmidt-Thieme, Barbara / Weigand, Hans-Georg (2015): Medien. In: Bruder, R./ Hefendehl-Hebeker, L. / Schmidt-Thieme, B. / Weigand, H.-G. (Hrsg.). Handbuch der Mathematikdidaktik. Springer Spektrum: Berlin, Heidelberg. S. 461-490.

Schröder, Max / Wurl, Bernd / Wynands, Alexander (2000): Maßstab 10 B. Mathematik Hauptschule. Schroedel Verlag: Hannover.

Siebel, Franziska (2004): Elementare Algebra und ihre Fachsprache. Eine allgemein-mathematische Untersuchung. Dissertation, Fachbereich Mathematik, TU Darmstadt.

Sjuts, Johann (2018): Metakognitive Strategien im Mathematikunterricht. „I do not Know what I think until I write it.”. Mathematik lehren 211. S. 20-24.

Strecker, Christian (1999): Aus Fehlern lernen und verwandte Themen. Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik, Universität Bayreuth. Abrufbar unter: http://www.blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/33/fehler.pdf (letzter Aufruf: 10.03.2019).

Thurm, Daniel / Klinger, Marcel / Barzel, Bärbel / Rögler, Paul (2017): Überzeugungen zum Technologieeinsatz im Mathematikunterricht: Entwicklung eines Messinstruments für Lehramtsstudierende und Lehrkräfte. In: mathematica didactica 40. S. 1-18.

Uhden, Olaf (2012): Mathematisches Denken im Physikunterricht. Theorieentwicklung und Problemanalyse. Dissertation. Logos Verlag: Berlin.

Van Ackeren, Isabell / Klemm, Klaus / Kühn, Svenja Maeike (2015): Entstehung, Struktur und Steuerung des deutschen Schulsystems. Eine Einführung. In: Springer Fachmedien: Wiesbaden.

Vogel. Markus / Wittmann, Gerald (2010): Mit Darstellungen arbeiten – tragfähige Vorstellungen entwickeln. In: Praxis Mathematik Heft 32 Jahrgang 52. S. 1-8.

Vollrath, Hans-Joachim (1989): Funktionales Denken. In: Journal für Mathematik Didaktik 10. S. 3-37

Vom Hofe, Rudolf (1994): Ursprünge des Grundvorstellungskonzepts in der deutschen Mathematikdidaktik. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1994. Vorträge auf der 28. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 28.2. bis 4. 3.1993 in Duisburg. Franzbecker: Hildesheim. S. 151-154

Vom Hofe, Rudolf (2003): Grundbildung durch Grundvorstellungen. In: Mathematik lehren 118. S. 4-8.

Waasmaier, Sieglinde (2016): Übend entdecken – Entdeckend üben. In: Praxis Mathematik 67 / 58. S. 32-35.

Welling, Stefan (2017): Methods matter. Methodisch-methodologische Perspektiven für die Forschung zum Lernen und Lehren mit Tablets. In: Bastian, J. / Aufenanger, S. (Hrsg.): Tablets in Schule und Unterricht. Forschungsmethoden und Perspektiven zum Einsatz digitaler Medien. Springer Fachmedien: Wiesbaden. S. 15-36.

Winter, Heinrich Winand (1984): Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. In: Mathematik lehren 2 / 84. S. 4-16.

Winter, Heinrich Winand (2016): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und Bedeutung für die Pädagogik. Springer Spektrum: Wiesbaden.

Wittmann, Erich Christian (1990): Wider die Flut der „bunten Hunde“ und der „grauen Päckchen“: Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In: Ders. / Müller, G. (Hrsg.): Handbuch produktiver Rechenübungen Bd. 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Klett: Stuttgart. S. 152-166.

Wynands, Alexander (2006): Intelligentes Üben. In: Blum, W. / Drüke-Noe, C. / Hartung, R. / Köller, O. (Hrsg.). Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen. Cornelsen Skriptor: Berlin. S. 113-125.

Zeller, Matthias / Barzel, Bärbel (2011): Der Einsatz von CAS im Mathematikunterricht - zum Stand der Forschung. In: Haug, R. / Holzäpfel, L. (Hrsg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Vorträge auf der 45. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 21.02.1011 bis 25.02.1011 in Freiburg. Band 1 und 2. WTM: Münster. S. 919-922.

13.Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe erarbeitet und alle dabei genutzten Hilfsmittel (Literatur, Internetquellen, …) explizit angegeben habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß anderen Werken entnommen sind, sind in jedem Einzelfall unter genauer Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden. Für den Ausnahmefall, dass ich mich mit dem Themenfeld der Ausarbeitung bereits in einer anderen Lehrveranstaltung beschäftigt habe, habe ich eine hinreichende Abgrenzung mit der Dozentin der aktuellen Lehrveranstaltung abgesprochen und dies in dieser Ausarbeitung auch angemerkt.

Claudia Rickscherd   Essen, den 11.03.2019