Lösungsblatt zu Übungsblatt 13 zum Studienvorkurs Mathematik

SS 2014, 26.03.2014

Aufgabe 1: Wir stellen f zunächst vereinfacht dar als $s(t) = \dfrac{t\,(t+3)}{t+4}$.

(a) $s'(t) = \dfrac{t^2 + 8\,t + 12}{(t+4)^2}$ für alle $t \in [0, 12]$. Die Einheit ist KB/s.

(b) $s''(t) = \dfrac{8}{(t+4)^3}$ für alle $t \in [0, 12]$. Die Einheit ist KB/s^2.

(c) Wir überprüfen, ob $s'(t)$ für alle $t \in [0, 12]$ positiv ist. Da der Nenner von $s'(t)$ immer positiv ist, geht das Vorzeichen nur vom Zähler, d.h. $t^2 + 8\,t + 12$, aus. Dieser Ausdruck ist für das entsprechende Intervall immer positiv. Daher ist s streng monoton steigend.

(d) $g(t) = t - 1$

(e) Wir einigen uns auf $1,5MB = 1,5 \cdot 1000KB = 1500KB$ (dies entspricht dem *Système international d'unités*, kurz *SI*).
Wir betrachten $s(t) = 1500$ und lösen zu t auf. Es ergibt sich $t_1 = \frac{1497}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2265009} \approx -3,997342188$, $t_2 = \frac{1497}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2265009} \approx 1500.997342$. Da nur t_2 inhaltlich sinnvoll ist, akzeptieren wir diesen Wert als korrekte Lösung.
Für $g(t) = 1500$ folgt der Wert 1501. Dies liefert also eine gute Näherung an die Funktion s in diesem Punkt.
Bei 1501 Sekunden kann man wirklich nicht von wenigen Sekunden reden. Das war's dann wohl. Aus die Maus. Rein mit der Kapsel.

Aufgabe 2: $f'(x) = 4x^3 - 2x - 1, \quad f''(x) = 12x^2 - 2, \quad f'''(x) = 24x$

(a) Einzige Nullstelle der Ableitung ist $x_0 = 0,8846461771$. Es gilt $f'(x_0 - \delta) < f'(x_0) < f'(x_0 + \delta)$ für ein sehr kleines $\delta > 0$ (ausprobieren!). Daher liegt ein Vorzeichenwechsel der Ableitung vor und es handelt sich entsprechend der Vorlesung um eine lokale Minimalstelle.

(b) Es gilt $f(-2) = 16$ und $f(2) = 12$. Da es keine lokalen Maximalstellen gibt, liegt die absolute Maximalstelle bei $x_1 = -2$. Da beide Funktionswerte am Rand des Definitionsbereichs größer als $f(x_0)$ sind, handelt es sich bei der lokalen Minimalstelle auch um eine globale.

(c) Nein, eine Funktion mit einem echten Tiefpunkt kann nicht mehr monoton auf dem gesamten Definitionsbereich sein.

(d) Kandidaten für Wendestellen sind $x_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}$ und $x_3 = -\frac{\sqrt{6}}{6}$. Die einzige Nullstelle der dritten Ableitung ist 0. Daher handelt es sich bei beiden Kandidaten um Wendestellen.

(e) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$