technische universität
dortmund
Marcel Klinger, M.Sc.

fakultät für
informatik

Übungsblatt 15 zum Studienvorkurs Mathematik

SS 2014, 28.03.2014

1 Grundlagen

Aufgabe 1: Es seien A, B, C Aussagen. Man bestimme den Wahrheitswert der Aussage

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

mit Hilfe einer Wahrheitstafel. Wie lautet die spezielle Bezeichnung für eine solche Aussage?

Aufgabe 2: Man gebe an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
(b) $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$
(c) $\mathbb{R} \subset \mathbb{Q}$
(d) $\emptyset \subset \mathbb{Q}$
(e) $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$
(f) $\mathbb{N} \subset \emptyset$
(g) $\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$
(h) $\emptyset \subset \emptyset$
(i) $\mathbb{Z} \nsubseteq \mathbb{Z}$
(j) $\neg(\mathbb{Z} \nsubseteq \mathbb{Z})$

Aufgabe 3: Es sei M eine Menge.

(a) Man definiere $\mathcal{P}(M)$ <u>ohne</u> das Skriptum zu benutzen.

(b) Man gebe $|\mathcal{P}(M)|$ an, falls $|M| = n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Gilt $\mathcal{P}(\emptyset) = \emptyset$?

(d) Man führe einen Induktionsbeweis für (b).

Aufgabe 4: Man bestimme Real- und Imaginärteil von

$$z = \frac{3-4i}{-7+2i} \in \mathbb{C}\,.$$

Aufgabe 5: Man nenne jeweils den Namen des Gesetzes, das die folgende Rechnung erlaubt, <u>ohne</u> das Skriptum zu benutzen.

(a) $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3$
(b) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
(c) $12(1+4) = 12 \cdot 1 + 12 \cdot 4$
(d) $7+3+4+2 = 7+7+2$

Aufgabe 6: Man beweise

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

mittels Induktion.

Aufgabe 7: Man betrachte die Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sowie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = (e^{x^3}, x^2 + x + 7) \quad \text{sowie} \quad g(x,y) = \ln(e \cdot |x|) + y^2.$$

Man bestimme $g \circ f$.

2 Algebra

Aufgabe 8: Man bestimme die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme.

(a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$

(b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Aufgabe 9: Gegeben sind die folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Man bestimme

(a) zu jeder Matrix ihre transponierte Matrix,

(b) alle definierten Produkte zweier Matrizen,

(c) $(2 \cdot A + B^\top) \cdot D^\top$,

(d) $D \cdot B \cdot C - A^\top$,

(e) C^{-1},

(f) $\operatorname{Rang} C$,

(g) ob $f(\vec{x}) = C\vec{x}$ mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ injektiv, surjektiv oder bijektiv ist,

(h) $C^{16} := \underbrace{C \cdot \ldots \cdot C}_{16 \text{ mal}}$ und

(i) $f^{16}(\vec{e}_1)$.

3 Analysis

Aufgabe 10: Man bestimme den Grenzwert der folgenden reellen Zahlenfolgen für $n \to \infty$ oder gebe an, dass dieser nicht existiert.

(a) $\dfrac{(-1)^n}{n}$

(b) $\sqrt[n]{n}$

(c) e^n

(d) e^{-n}

(e) $\log_{10}(n)$

(f) $\ln(n)$

(g) $\dfrac{n^4 + 3n^2 + n - 1}{6n^4 + 3n}$

(h) $\dfrac{n^4 + 3n^2 + n - 2^n}{6n^4 + 3n2^n + \sqrt{n}}$

(i) $\cos(n)$

Aufgabe 11: Man differenziere den Ausdruck $1/x$ auf zwei verschiedene Weisen mit Hilfe zwei verschiedener Ableitungsregeln.

Aufgabe 12: Man bestimme die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_3^5 x^3 - 2x + 1 \mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_e^{2e} \frac{1}{x+e} \mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \cos(x) + \sin(x) \mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_2^6 \frac{2x}{x^2 + x} \mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_7^7 \frac{2x^2 + 3}{3x^4 - 7} \mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int_{-1}^6 (\sin(x))^2 \mathrm{d}x + \int_{-1}^6 (\cos(x))^2 \mathrm{d}x$

Homepage zur Veranstaltung: http://www.mklinger.net/vorkurs/