technische universität dortmund
Marcel Klinger, M.Sc.

fakultät für informatik

Lösungsblatt zu Übungsblatt 15 zum Studienvorkurs Mathematik

SS 2014, 28.03.2014

1 Grundlagen

Aufgabe 1: Die Aussage ist unabhängig von den Werten für A, B, C immer wahr. Eine solche Aussage heißt auch Tautologie.

Aufgabe 2: Man gebe an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) wahr
(b) falsch
(c) falsch
(d) wahr
(e) wahr
(f) falsch
(g) falsch
(h) wahr
(i) wahr
(j) falsch

Aufgabe 3: Es sei M eine Menge.

(a) $\mathcal{P}(M) := \{A \mid A \subset M\}$

(b) $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$

(c) Nein, denn $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \neq \emptyset$

(d) Die Potenzmenge der Menge ohne Elemente, d.h. der leeren Menge, enthält genau ein Element (s.o), nämlich $\emptyset$ (Induktionsanfang). Wir gehen davon aus, dass die Induktionsvoraussetzung bereits für ein n gilt und die Potenzmenge einer Menge M mit n Elementen somit 2^n Elemente enthält. Befüllen wir M nun mit einem weiteren Element, teilen sich die Elemente aus $\mathcal{P}(M)$ in zwei gleich große Gruppen: Solche Teilmengen von M, die das neue Element enthalten, und jene, welche dies nicht tun. Bei der ersten Gruppe handelt es sich um alle Mengen, die zuvor bereits für $|M| = n$ in der Potenzmenge waren, bei der zweiten um dieselben, außer dass das neue Element in jede Teilmenge hinzugefügt wurde. Insgesamt ergeben sich so nun $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ Teilmengen (Induktionsschritt).

Aufgabe 4:
$z = -\frac{29}{53} + \frac{22}{53}i$, d.h. $\operatorname{Re} z - \frac{29}{53}$ und $\operatorname{Im} z = \frac{22}{53}$

Aufgabe 5: Man nenne jeweils den Namen des Gesetzes, das die folgende Rechnung erlaubt, ohne das Skriptum zu benutzen.

(a) Kommutativgesetz
(b) Assoziativgesetz
(c) Distributivgesetz
(d) Assoziativgesetz

Aufgabe 6:
Es gilt $\sum_{k=2}^{n+1}(k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$. Damit handelt es sich um Aufgabe 1 (c) von Übungsblatt 4.

Aufgabe 7: $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g \circ f(x) = x^4 + 3\,x^3 + 15\,x^2 + 14\,x + 50$

2 Algebra

Aufgabe 8:

(a) Betrachte Beispiel 2.1.13 und Beispiel 2.1.14 des Skriptums.

(b) Betrachte Beispiel 2.1.19 des Skriptums.

Aufgabe 9:

(a) $A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B^\top = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C^\top = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $D^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -3 & 27 \end{pmatrix}$, $AD = \begin{pmatrix} 13 & 2 & 6 \\ 28 & -1 & 15 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$, $BC = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & 2 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$,

$CA = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$, $CC = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, $DB = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 8 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$, $DD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 12 & 7 & -3 \\ 4 & -10 & 6 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -10 & 13 & 10 \\ -13 & 34 & 58 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -5 & -12 \\ 30 & -7 \\ 21 & -18 \end{pmatrix}$,

(e) $\begin{pmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

(f) 2

(g) Da C invertierbar ist, ist die von C induzierte lineare Abbildung bijektiv und somit auch injektiv und surjektiv.

(h) $\begin{pmatrix} 16777216 & 0 \\ 0 & 16777216 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 16777216 \\ 0 \end{pmatrix}$

3 Analysis

Aufgabe 10: Man bestimme den Grenzwert der folgenden reellen Zahlenfolgen für $n \to \infty$ oder gebe an, dass dieser nicht existiert.

(a) 0

(b) 1

(c) existiert nicht (bestimmt divergent gegen ∞)

(d) 0

(e) existiert nicht (bestimmt divergent gegen ∞)

(f) existiert nicht (bestimmt divergent gegen ∞)

(g) $\dfrac{1}{6}$

(h) 0

(i) existiert nicht

Aufgabe 11:
Die Ableitung lautet $-\dfrac{1}{x^2}$. Dies kann über die Quotienten- oder Potenzregel hergeleitet werden.

Aufgabe 12: Man bestimme die folgenden Integrale.

(a) 122

(b) $\ln(\frac{3}{2})$

(c) 0

(d) $2(\ln(7) - \ln(3))$

(e) 0

(f) 7