technische universität
dortmund
Marcel Klinger, M.Sc.

fakultät für
informatik

Übungsblatt 3 zum Studienvorkurs Mathematik

SS 2014, 12.03.2014

Aufgabe 1: Man überführe den Ausdruck in die Form b^e mit $b \in \mathbb{N}$ und $e \in \mathbb{Q}$ um.

(a) $\dfrac{\sqrt[2]{6}}{6^3}$

(b) $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2^{-\frac{1}{3}}}}$

(c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[1]{81}}}$

(d) $\sqrt[100]{2^{10}}$

(e) $\sqrt[42]{\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}} + \sqrt[\sqrt{4}]{\dfrac{2^{2^2}}{\sqrt{7^{\sqrt{5}-\sqrt{5}}}}}}$

Aufgabe 2: Man fasse soweit wie möglich zusammen.

(a) $\dfrac{(n+1)!}{n!}$

(b) $(n+1)!2^n(n+2)$

(c) $\dfrac{(n^2)!}{n^2}$

(d) $110! + 108!$

(e) $\dfrac{(3!)!}{3!}$

(f) $\dfrac{\frac{1}{2}(2n+1)!}{2n^2+n}$

Aufgabe 3: Man fasse soweit wie möglich zusammen.

(a) $\binom{6}{6}$

(b) $\binom{42}{0}$

(c) $\binom{2n}{6} + \binom{2n}{2n-6}$

(d) $\binom{10}{3}$

(e) $\binom{9}{3} + \binom{9}{2}$

(f) $\binom{10}{7}$

Aufgabe 4: Wir betrachten das sog. *Collatz-Problem*: Hierbei handelt es sich um ein 1937 von Lothar Collatz formuliertes mathematisches Problem, welches bis heute ungelöst ist. Bei dem Problem geht es um Zahlenfolgen, die nach einem gewissen Bildungsgesetz konstruiert werden:

(1) Wähle eine beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$.

(2) Falls n gerade ist, bestimme $\frac{n}{2}$.

(3) Falls n ungerade ist, bestimme $3n + 1$.

(4) Wiederhole die Vorgehensweise mit der erhaltenen Zahl.

Die bis heute unbewiesene Vermutung lautet, dass man – unabhängig davon, mit welchem $n \in \mathbb{N}$ man startet – immer in den *Zyklus* $4, 2, 1$ läuft und hier „gefangen" bleibt. Ungeachtet der Frage, ob die Aussage nun wahr oder falsch ist, nehmen wir an, alle Startzahlen n, für welche die Aussage gilt, befinden sich in der Menge $S \subset \mathbb{N}$, dann lautet Collatz' Vermutung also, dass $S = \mathbb{N}$ gilt.

(a) Man überprüfe die Behauptung für die Startzahl $n = 19$.

(b) Welche Beweismethode wäre prinzipiell geeignet, um die Aussage zu beweisen? Welche, um sie zu widerlegen?

(c) Man zeige, dass $S \neq \emptyset$ gilt.

(d) Man zeige, dass $|S| = \infty$ gilt.