technische universität dortmund
Marcel Klinger, M.Sc.

fakultät für informatik

Lösungsblatt zu Übungsblatt 4 zum Studienvorkurs Mathematik

SS 2014, 13.03.2014

Wir machen jeweils keine Induktionsanfänge und zeigen nur den Induktionsschritt. Zur Vollständigkeit des jeweiligen Beweises gehören diese jedoch notwendig dazu!

Aufgabe 1:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \left(\sum_{k=0}^{n} 2^k\right) + 2^{n+1} \overset{\text{I.V.}}{=} 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+1+1} - 1$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \left(\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\right) + (n+1)(n+2) \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2 \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$

(d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} 4^k = \left(\prod_{k=1}^{n} 4^k\right) \cdot 4^{n+1} \overset{\text{I.V.}}{=} 2^{n(n+1)} \cdot 4^{n+1} = 2^{n(n+1)} \cdot 2^{n+1} \cdot 2^{n+1} = 2^{n(n+1)+n+1+n+1} = 2^{n(n+1)+2(n+1)} = 2^{(n+1)(n+1+1)}$

(e) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n+1} (1 - \frac{1}{k}) = \left(\prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k})\right) \cdot (1 - \frac{1}{n+1}) \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{1}{n} \cdot (1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n} \cdot (\frac{(n+1)-1}{n+1}) = \frac{\frac{n}{n}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

Aufgabe 2:

(a) $(n+1)^3 + 2(n+1) = (n+1)^3 + 2n + 2 = (n+1)^3 + 2n + n^3 - n^3 + 2 \overset{\text{I.V.}}{=} (n+1)^3 + 3a - n^3 + 2 = (n^2 + 2n + 1)(n+1) + 3a - n^3 + 2 = n^3 + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 1 + 3a - n^3 + 2 = 3n^2 + 3n + 3 + 3a = 3(n^2 + n + 1 + a)$

(b) $4(n+1)^3 - (n+1) = 4(n^2+2n+1)(n+1) - (n+1) = 4(n^2+2n+1)(n+1) + 4n^3 - n - 1 - 4n^3 \overset{\text{I.V.}}{=} (4n^2+8n+4)(n+1) + 3a - 4n^3 - 1 = 4n^3 + 8n^2 + 4n + 4n^2 + 8n + 4 + 3a - 4n^3 - 1 = 3a + 12n^2 + 12n + 3 = 3(a + 4n^2 + 4n + 1)$

(c) $(n+1)^3-(n+1) = (n+1)^3-n-1+n^3-n^3 = (n^2+2n+1)(n+1)+n^3-n-1-n^3 \overset{\text{I.V.}}{=} n^3+2n^2+n+n^2+2n+1+6a-1-n^3 = 3n^2+3n+6a$
Dass $3n^2+3n$ durch 6 teilbar ist, zeigen wir mit einer zweiten, in die erste geschachtelten Induktion.
$3(n+1)^2+3(n+1) = 3(n^2+2n+1)+3n+3 = 3n^2+6n+3+3n+3 \overset{\text{I.V.}}{=} 6b+6n+6 = 6(b+n+1)$

(d) $5^{n+1}+7 = 5(5^n+7)-28 \overset{\text{I.V.}}{=} 5(4a)-28 = 4(5a-7)$

Aufgabe 3:

(a) $(n+1)^2-2(n+1)-1 = n^2+2n+1-2n-2-1 = \underbrace{n^2-2n-1}_{>0 \text{ nach I.V.}} + \underbrace{2n-1}_{>0\ \forall\ n\geq 3} > 0$

(b) $2^{n+1} = 2\cdot 2^n \overset{\text{I.V.}}{\geq} 2(n+1) = 2n+2 \geq n+1+1$

(c) $2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{\text{I.V.}}{>} 2n^2+4n+2-4n-2 = 2(n^2+2n+1)-4n-2 = 2(n+1)^2-4n-2 > (n+1)^2$

(d) $(n+1)! = n!(n+1) \overset{\text{I.V.}}{>} 2^n(n+1) > 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$

Aufgabe 4:

(a) $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+(1-q)q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1+1}}{1-q}$

(b) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$