technische universität dortmund
Marcel Klinger, M.Sc.

fakultät für informatik

Lösungsblatt zu Übungsblatt 6 zum Studienvorkurs Mathematik

SS 2014, 17.03.2014

Aufgabe 1:

(a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

(b) $W = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(c) $\text{Bild}(f) = W$

(d) Wir zeigen zunächst, dass f auf $(-\infty, -1]$ streng monoton steigend ist. Dazu seien $x_1, x_2 \in (-\infty, -1)$ und $x_1 < x_2$. Es gilt

$$\begin{aligned}
& f(x_1) && < f(x_2) \\
\Leftrightarrow \quad & 1 - \frac{1}{x_1+1} && < 1 - \frac{1}{x_2+1} \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{x_1+1} && < -\frac{1}{x_2+1} && \quad | \cdot (-1) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{x_1+1} && > \frac{1}{x_2+1} && \quad |^{-1} \\
\Leftrightarrow \quad & x_1 + 1 && < x_2 + 1 \\
\Leftrightarrow \quad & x_1 && < x_2.
\end{aligned}$$

Für $x_1, x_2 \in (-1, \infty)$ analog. f ist nicht auf ganz D streng monoton steigend, da z.B. $f(-3) = \frac{3}{2} > \frac{1}{2} = f(1)$, was im Widerspruch dazu steht, dass f auf ganz D streng monoton steigend ist.

(e) Da das Bild der gesamte Wertebereich ist, wird jedes $y \in W$ mindestens einmal getroffen, was der Definition der Surjektivität gleichkommt.

(f) Wenn f injektiv ist, wird jedes $y \in W$ von höchstens einem $x \in D$ getroffen. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass y von mindestens zwei verschiedenen x-Werten getroffen wird, nämlich $x_1 \neq x_2$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{D}$. Dann gilt $f(x_1) = y$ und $f(x_2) = y$ und wir folgern

$$\begin{aligned}
& f(x_1) && = f(x_2) \\
\Leftrightarrow \quad & 1 - \frac{1}{x_1+1} && = 1 - \frac{1}{x_2+1} \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{x_1+1} && = -\frac{1}{x_2+1} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{x_1+1} && = \frac{1}{x_2+1} \\
\Leftrightarrow \quad & x_1 + 1 && = x_2 + 1 \\
\Leftrightarrow \quad & x_1 && = x_2 \ \lightning.
\end{aligned}$$

$x_1 = x_2$ ist ein Widerspruch zur Annahme, dass beide Werte unterschiedlich sein sollen. Daher muss das Gegenteil der Annahme $x_1 \neq x_2$ gelten und somit gilt $x_1 = x_2$. Jedes Element in W wird also von höchstens einem Element aus D getroffen und die Funktion ist somit injektiv.

(g) Aus der Surjektivität und Injektivität von f folgt die Bijektivität von f.

(h) Wir formen den Funktionszusammenhang $y = 1 - \frac{1}{x+1}$ zwischen einem Element $y \in W$ und $x \in D$ um:
$y = 1 - \dfrac{1}{x+1} \Leftrightarrow y - 1 = -\dfrac{1}{x+1} \Leftrightarrow -y + 1 = \dfrac{1}{x+1} \Leftrightarrow (-y+1)(x+1) = 1 \Leftrightarrow$ $x + 1 = \dfrac{1}{-y+1} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{-y+1} - 1.$
Die letzte nach x umgestellte Beziehung liefert also zu jedem $y \in W$ das ursprüngliche $x \in D$ (hierfür haben wir den Begriff des Urbilds eingeführt). Daher ist $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{-x+1} - 1$ die Umkehrabbildung.

(i) $f(f^{-1}(x)) = 1 - \dfrac{1}{\left(\frac{1}{-x+1} - 1\right) + 1} = x$ ✓

Aufgabe 2:

(a) Die erste Rechnung stellen wir noch vollständig dar.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
(4x^5 & -x^4 & +2x^3 & +x^2 & -1) & \div & (x^2 & +1) & = & 4x^3 - x^2 - 2x + 2 + \frac{2x-3}{x^2+1} \\
\underline{-4x^5} & & \underline{-4x^3} & & & & & & & \\
 & -x^4 & -2x^3 & & & & & & & \\
 & \underline{+x^4} & & \underline{+x^2} & & & & & & \\
 & & -2x^3 & +2x^2 & & & & & & \\
 & & \underline{+2x^3} & & \underline{+2x} & & & & & \\
 & & & 2x^2 & +2x & -1 & & & & \\
 & & & \underline{-2x^2} & & \underline{-2} & & & & \\
 & & & & 2x & -3 & & & &
\end{array}
$$

(b) $x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 5x - 4$

(c) $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 4$