technische universität dortmund
Marcel Klinger, M.Sc.

fakultät für informatik

Übungsblatt 7 zum Studienvorkurs Mathematik

SS 2014, 18.03.2014

Aufgabe 1: Man gebe den Rang, den erweiterten Rang sowie die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der folgenden linearen Gleichungssysteme an.

(a) $\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$

(b) $\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & -4 \\ -1 & 2 & -4 & -4 & -6 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right)$

(c) $\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & -4 \\ -1 & 2 & -4 & -4 & -6 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right)$

Aufgabe 2: Es sei für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ das folgende lineare Gleichungssystem gegeben:

$$\begin{array}{llllll} 3x_1 & +x_2 & +4\alpha x_3 & = & 11\beta + 3 \\ 3x_1 & +x_2 & +(5\alpha - 3)x_3 & = & 12\beta + 4 \\ 4x_1 & +x_2 & +(4\alpha + 3)x_3 & = & 12\beta + 3 \end{array}$$

Man bestimme alle 2-Tupel $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, für die das LGS

(a) nicht lösbar,

(b) eindeutig lösbar sowie

(c) lösbar, aber nicht eindeutig lösbar ist.

Man gebe jeweils die Lösungsmenge des LGS für den jeweiligen Fall an.

Aufgabe 3: Es sei die Menge $M_n := \{1, 2, 3, \dots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Eine bijektive Abbildung $p : M_n \to M_n$ nennt man auch *Permutation*. Stellt man sie in der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & p(3) & \dots & p(n) \end{pmatrix}$$

dar, kann man sie auch als Umordnung oder Vertauschung von n Objekten (hier den ersten n natürlichen Zahlen) verstehen. Wir nennen die Menge, die alle Permutationen der Menge M_n enthält S_n, also

$$S_n := \{p : M_n \to M_n \mid p \text{ ist bijektiv}\}.$$

(a) Wir betrachten exemplarisch zunächst S_4 genauer. Man bestimme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hierbei stellt „$\circ$“ die bereits bekannte Hintereinanderausführung von Abbildungen dar.

(b) Man finde $p \in S_4$, so dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(c) Man bestimme $|S_4|$.

(d) Man finde eine Formel für $|S_n|$.

(e) Man zeige, dass $(S_n, \circ)$ eine Gruppe ist. Man nennt diese Gruppe auch *symmetrische Gruppe*.

(f) Man zeige, dass $(S_2, \circ)$ abelsch ist.

(g) Man zeige, dass $(S_n, \circ)$ für $n > 2$ nicht abelsch ist.