technische universität dortmund
Marcel Klinger, M.Sc.

fakultät für informatik

Lösungsblatt zu Übungsblatt 7 zum Studienvorkurs Mathematik

SS 2014, 18.03.2014

Aufgabe 1:

(a) $\mathbb{L} = \{(0, -2\lambda, -2\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$; der Rang sowie der erweiterte Rang ist 3.

(b) $\mathbb{L} = \{(2, -2-2\lambda, -2\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$; der Rang sowie der erweiterte Rang ist 3.

(c) $\mathbb{L} = \emptyset$; der Rang ist 3, der erweiterte Rang ist 4.

Aufgabe 2:

(a) $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha = 3 \wedge \beta \neq -1\}$, $\mathbb{L} = \emptyset$

(b) $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha \neq 3\}$, $\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{\beta\alpha - 6\beta - 3}{\alpha - 3}, \frac{4\beta\alpha - \alpha - 15\beta}{\alpha - 3}, \frac{\beta + 1}{\alpha - 3}\right)\right\}$

(c) $\{(\alpha, \beta) \mid \alpha = 3 \wedge \beta = -1\}$, $\mathbb{L} = \{(-\beta - 2 + 3\lambda, 8\beta - 3 + (9 - 4\alpha)\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 3:

(a) $\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

(d) $n!$

(e) $\circ : M_n \times M_n \to M_n$ ist offenbar eine innere Verknüpfung.

(1) Die Komposition von Abbildungen ist immer assoziativ. Es gilt also für drei Permutationen $p, q, r \in S_n$: $(p \circ q) \circ r = p \circ (q \circ r)$.

(2) Das neutrale Element $e \in S_n$ ist die Identität

$$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix} \in S_4,$$

denn es gilt $p \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ p = p$ für alle $p \in S_n$.

(3) Zu einer beliebigen Permutation

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & p(3) & p(4) & \dots & p(n) \end{pmatrix} \in S_n$$

lautet das inverse Element

$$p^{-1} = \begin{pmatrix} p(1) & p(2) & p(3) & p(4) & \dots & p(n) \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix} \in S_n,$$

wobei die Spalten hierbei noch aufsteigend nach $p(1), \dots, p(n)$ sortiert werden müssen. Dann gilt $p \circ p^{-1} = p^{-1} \circ p = \mathrm{id}$.

Somit ist $(S_n, \circ)$ eine Gruppe.

(f) S_2 hat nur $2! = 2$ Elemente. Für diese kann dies von Hand nachgerechnet werden.

(g) Wir definieren $p, q \in S_n$ für $n > 2$ mit

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 2 & 1 & p(4) & \dots & p(n) \end{pmatrix} \text{ und } q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 3 & 2 & q(4) & \dots & q(n) \end{pmatrix}.$$

Jetzt gilt

$$\begin{aligned} p \circ q &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 1 & 2 & p \circ q(4) & \dots & p \circ q(n) \end{pmatrix} \\ &\neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 3 & 1 & q \circ p(4) & \dots & q \circ p(n) \end{pmatrix} = q \circ p \end{aligned}$$

und somit kann S_n nicht abelsch sein, da die Verknüpfung nicht kommutativ ist.