technische universität
dortmund
Marcel Klinger, M.Sc.

fakultät für
informatik

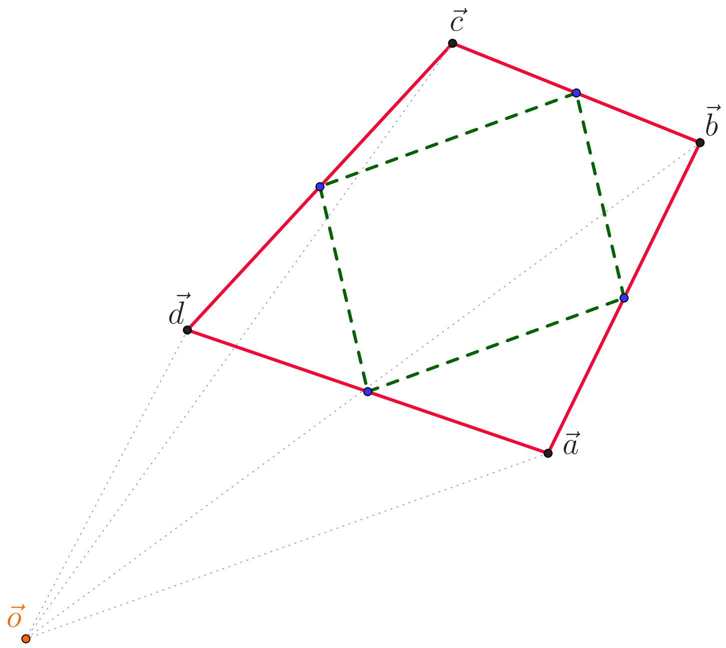
Lösungsblatt zu Übungsblatt 8 zum Studienvorkurs Mathematik

SS 2014, 19.03.2014

Aufgabe 1: Der Mittelpunkt zwischen den Punkten mit den Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist $\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$. Die Ortsvektoren der vier Seitenmittelpunkte sind also $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$, $\frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d})$ sowie $\frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{a})$. Die Vektoren, welche diese Punkte verbinden, sind jeweils gegenüberliegend identisch, denn

$$\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}) - \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{a}).$$

Somit sind sie parallel und gleich lang. Das andere Pärchen gegenüberliegender Seiten muss somit ebenfalls zueinander parallel und gleich lang sein. Daher handelt es sich um ein Parallelogramm.



Aufgabe 2:

$$\begin{aligned}
||\vec{u} + \vec{v}||^2 + ||\vec{u} - \vec{v}||^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) * (\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{u} - \vec{v}) * (\vec{u} - \vec{v}) \\
&= \vec{u} * \vec{u} + 2 \cdot \vec{u} * \vec{v} + \vec{v} * \vec{v} + \vec{u} * \vec{u} - 2 \cdot \vec{u} * \vec{v} + \vec{v} * \vec{v} \\
&= 2 \cdot \vec{u} * \vec{u} + 2 \cdot \vec{v} * \vec{v} \\
&= 2(\vec{u} * \vec{u} + \cdot \vec{v} * \vec{v}) \\
&= 2(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: $\frac{1}{2}||\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|| = \frac{35}{\sqrt{2}} \approx 24,75$

Aufgabe 4:

(a) Z.B. $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} -10 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix}$

(b) Z.B. $\vec{n}_0 = \frac{1}{10\sqrt{5}} \cdot \vec{n} = \frac{1}{10\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -16 \\ 12 \end{pmatrix}$

(c) Zwei, nämlich $\vec{n}$ und $-\vec{n}$

Aufgabe 5: Wir zeigen alle notwendigen Axiome: Es seien dazu $p, q \in \mathbb{P}_3$ wie auf dem Übungsblatt. Zusätzlich sei $r \in \mathbb{P}_3$ ein weiteres Polynom sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

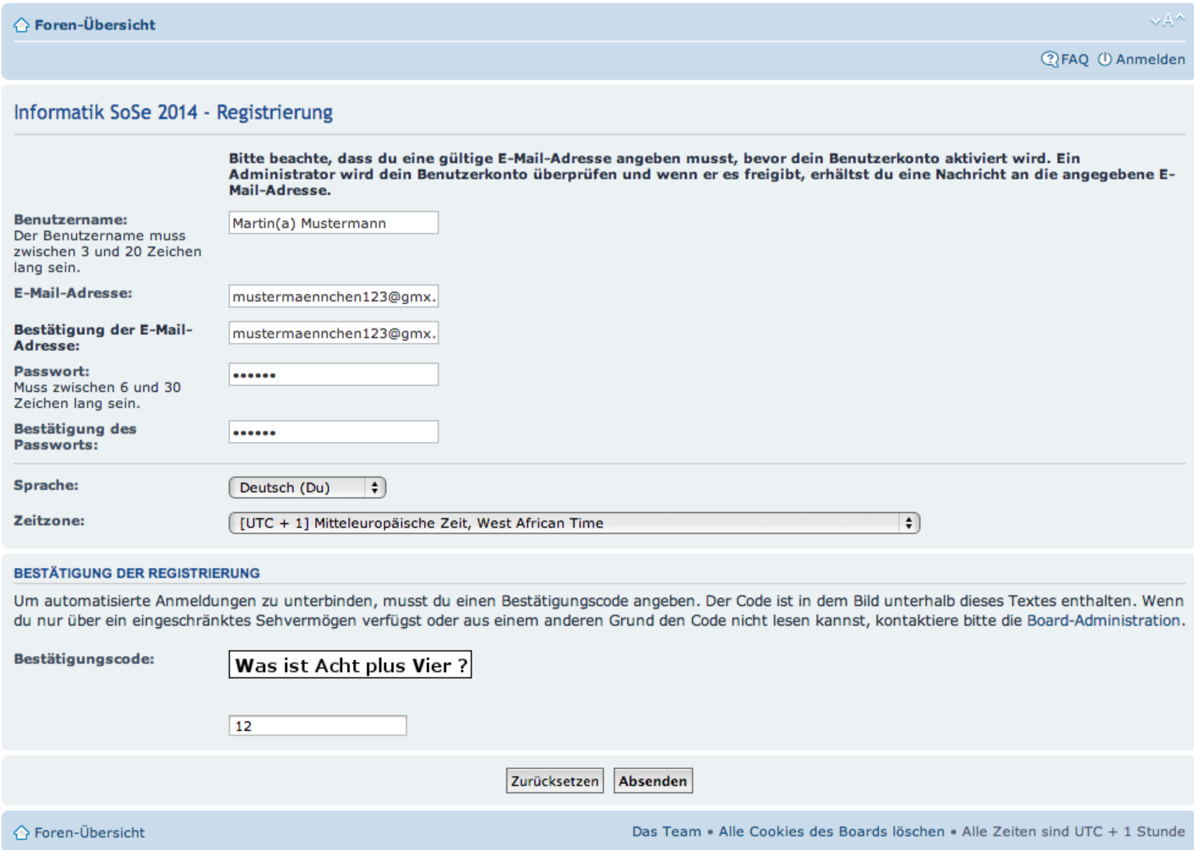
(1) Zu zeigen ist, dass $(\mathbb{P}_3, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

- (1.1) Es gilt natürlich $p(x) + (q(x) + r(x)) = (p(x) + q(x)) + r(x)$, da die Addition von Polynomen nach Definition nur die Addition der (reellen) Koeffizienten bedeutet und diese bereits (da $\mathbb{R}$ ja ein Körper ist) assoziativ sind.
- (1.2) Das neutrale Element $0_{\mathbb{P}_3}$ ist das Nullpolynom $n \in \mathbb{P}_3$ mit $n(x) = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = 0$. Es verändert bei Addition ein bestehendes Polynom p nicht.
- (1.3) Zu einem Polynom p ist das inverse Element das Polynom $-p \in \mathbb{P}_3$ mit $-p(x) = (-a)x^3 + (-b)x^2 + (-c)x + (-d)$. Nun gilt $p(x) + (-p(x)) = -p(x) + p(x) = n(x)$.
- (1.4) Es gilt auch $p + q = q + p$, da dies wieder nur die Addition der Koeffizienten bedeutet, die bereits kommutativ ist.

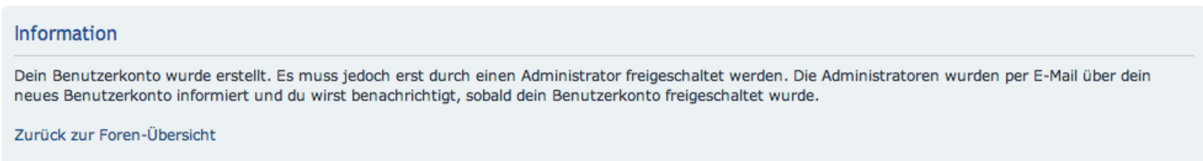
(2)
- (2.1) Es gilt $\lambda \cdot (p + q) = (\lambda \cdot p) + (\lambda \cdot q)$, da die skalare Multiplikation ebenso wie die Polynomaddition jeweils nur reelle Multiplikationen bzw. Additionen der Koeffizienten bedeuten, welche diese Eigenschaften bereits erfüllen.
- (2.2) Es gilt $(\lambda + \mu) \cdot p = (\lambda \cdot p) + \mu \cdot p)$ analog zu (2.1).
- (2.3) Es gilt $(\lambda \cdot \mu) \cdot p = \lambda \cdot (\mu + p)$ analog zu (2.1).
- (2.4) $1_{\mathbb{R}}$ ist die uns bekannte, „normale“ $1 \in \mathbb{R}$. Natürlich gilt auch $1 \cdot p = p$ wieder analog zu (2.1).

Aufgabe 6:

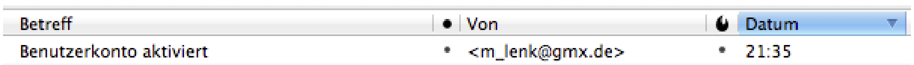
$\Downarrow$



$\Downarrow$



$\Downarrow$



☺