Algorithmisches Denken im Mathematikunterricht fördern

Ein Praxisbeitrag aus der Lehramtsausbildung Mathematik

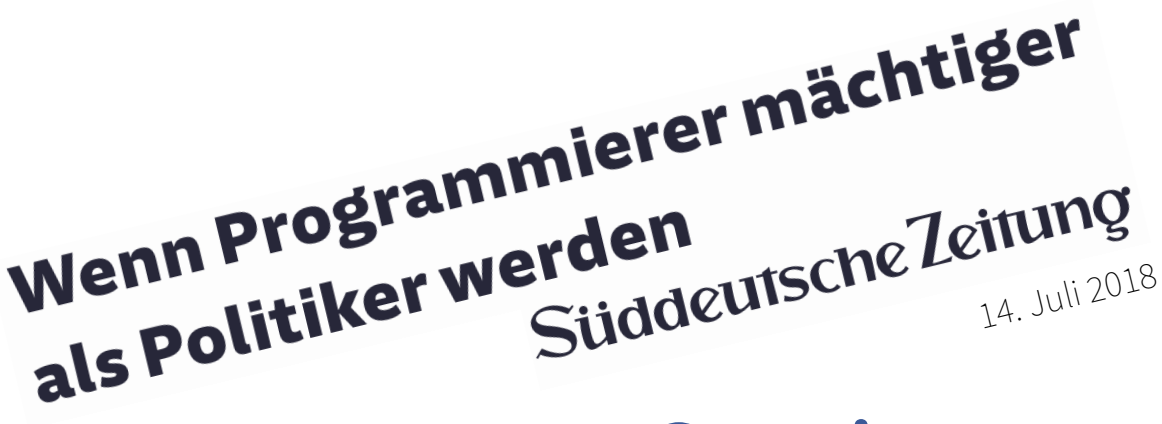
Dr. Marcel Klinger

Im Rahmen der Vernetzungstagung „Mathematikunterricht mit digitalen Medien und Werkzeugen in Schule und Forschung"

UDE

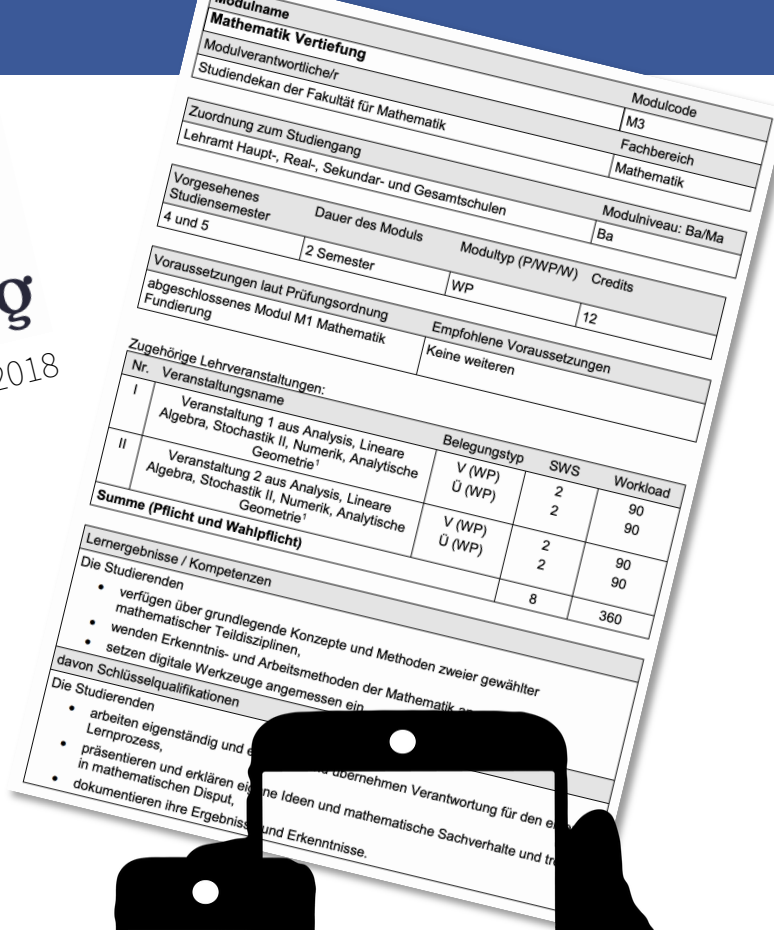
06.05.2023

Setting the scene


Wenn Programmierer mächtiger als Politiker werden

Süddeutsche Zeitung

14. Juli 2018


Modulname

Mathematik Vertiefung

Modulverantwortliche/r	Modulcode
Studiendekan der Fakultät für Mathematik	M3
	Fachbereich
	Mathematik

Zuordnung zum Studiengang	Modulniveau: Ba/Ma
Lehramt Haupt-, Real-, Sekundar- und Gesamtschulen	Ba

Vorgesehenes Studiensemester	Dauer des Moduls	Modultyp (P/WP/W)	Credits
4 und 5	2 Semester	WP	12

Voraussetzungen laut Prüfungsordnung	Empfohlene Voraussetzungen
abgeschlossenes Modul M1 Mathematik Fundierung	Keine weiteren

Zugehörige Lehrveranstaltungen:

Nr.	Veranstaltungsname	Belegungstyp	SWS	Workload
I	Veranstaltung 1 aus Analysis, Lineare Algebra, Stochastik II, Numerik, Analytische Geometrie[1]	V (WP) Ü (WP)	2 2	90 90
II	Veranstaltung 2 aus Analysis, Lineare Algebra, Stochastik II, Numerik, Analytische Geometrie[1]	V (WP) Ü (WP)	2 2	90 90
Summe (Pflicht und Wahlpflicht)			8	360

Lernergebnisse / Kompetenzen

Die Studierenden

- verfügen über grundlegende Konzepte und Methoden zweier gewählter mathematischer Teildisziplinen,
- wenden Erkenntnis- und Arbeitsmethoden der Mathematik
- setzen digitale Werkzeuge angemessen ein

davon Schlüsselqualifikationen

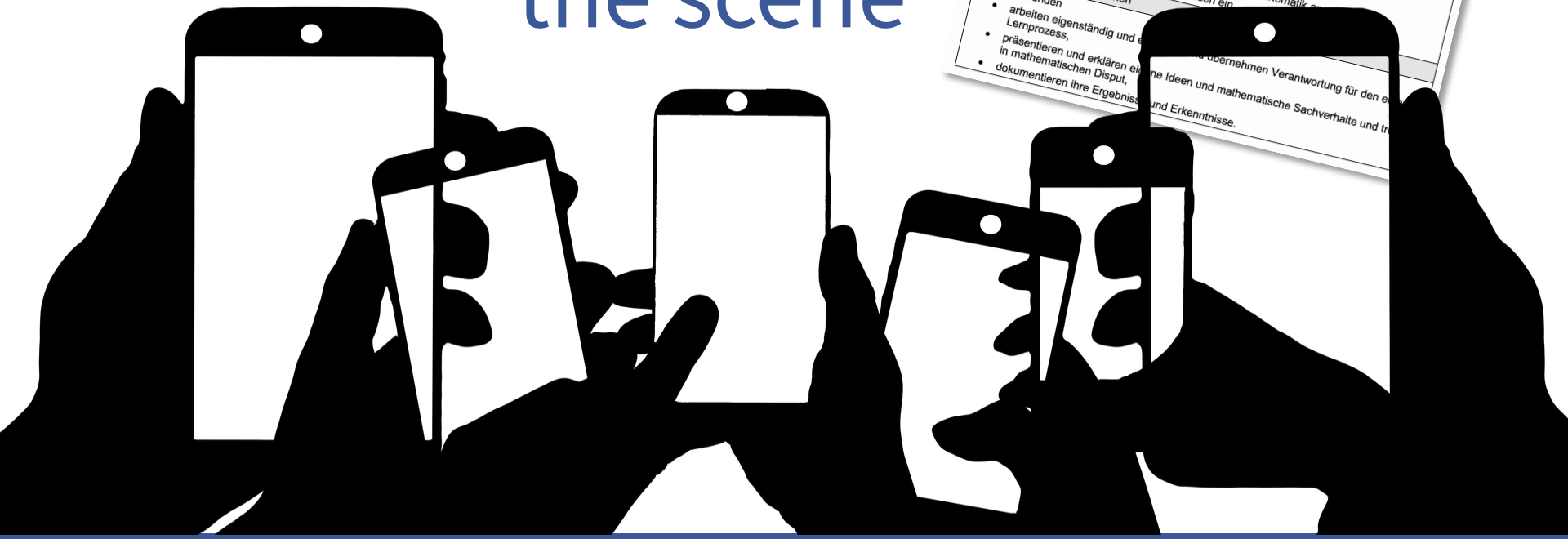
Die Studierenden

- arbeiten eigenständig und
- Lernprozess,
- präsentieren und erklären
- in mathematischen Disput,
- dokumentieren ihre Ergebnis

übernehmen Verantwortung für den

ne Ideen und mathematische Sachverhalte und

und Erkenntnisse.



Algorithmen *im* Mathematikunterricht

- Algorithmen und Algorithmisches Denken spielen eine bedeutende und weiter zunehmende Rolle in unserer Gesellschaft.
- Algorithmen haben gerade für die Mathematik und den Mathematikunterricht eine besondere Relevanz.
  (Möller et al. 2022; Oldenburg 2022; Zindel 2022; Ziegenbalg 2015)
- Algorithmen sind in aktuellen Mathematik-Curricula jedoch unterrepräsentiert oder nicht explizit thematisiert.
  (Stephens 2018; Milicic 2022; Zindel 2022; Kortenkamp & Lambert 2015)
- Daher: Studierende der mathematischen Lehrämter bereits im Studium an die Thematik heranführen und zum Algorithmischen Denken befähigen.

Das Modul

- Das Modul „Mathematik Vertiefung“ ist ein Wahlpflichtmodul in den Studiengängen Master Grundschule, sowie Bachelor / Master HRSGe.
- Umfang von 2 SWS Vorlesung + 2 SWS Übung (5 CP Grundschule, 6 CP HRSGe)
- Schwerpunkt: Weitergehende fachmathematische Vertiefung in eine math. Teildisziplin
  - Z.B. Analytische Geometrie, Analysis, Diskrete Mathematik, etc.

Modulname	Modulcode
Mathematik Vertiefung	M3
Modulverantwortliche/r	Fachbereich
Studiendekan der Fakultät für Mathematik	Mathematik

Zuordnung zum Studiengang	Modulniveau: Ba/Ma
Lehramt Haupt-, Real-, Sekundar- und Gesamtschulen	Ba

Vorgesehenes Studiensemester	Dauer des Moduls	Modultyp (P/WP/W)	Credits
4 und 5	2 Semester	WP	12

Voraussetzungen laut Prüfungsordnung	Empfohlene Voraussetzungen
abgeschlossenes Modul M1 Mathematik Fundierung	Keine weiteren

Zugehörige Lehrveranstaltungen:

Nr.	Veranstaltungsname	Belegungstyp	SWS	Workload
I	Veranstaltung 1 aus Analysis, Lineare Algebra, Stochastik II, Numerik, Analytische Geometrie[1]	V (WP) Ü (WP)	2 2	90 90
II	Veranstaltung 2 aus Analysis, Lineare Algebra, Stochastik II, Numerik, Analytische Geometrie[1]	V (WP) Ü (WP)	2 2	90 90
Summe (Pflicht und Wahlpflicht)			8	360

Lernergebnisse / Kompetenzen

Die Studierenden

- verfügen über grundlegende Konzepte und Methoden zweier gewählter mathematischer Teildisziplinen,
- wenden Erkenntnis- und Arbeitsmethoden der Mathematik an,
- setzen digitale Werkzeuge angemessen ein.

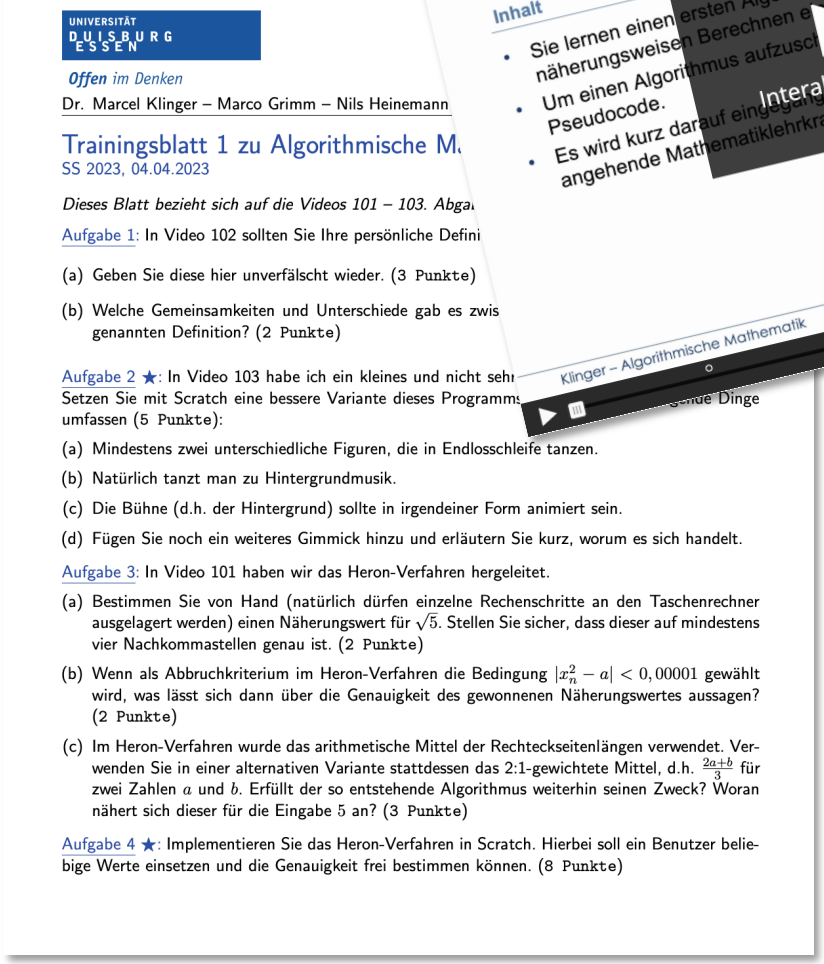
davon Schlüsselqualifikationen

Die Studierenden

- arbeiten eigenständig und engagiert und übernehmen Verantwortung für den eigenen Lernprozess,
- präsentieren und erklären eigene Ideen und mathematische Sachverhalte und treten in mathematischen Disput,
- dokumentieren ihre Ergebnisse und Erkenntnisse.

Algorithmische Mathematik

an der UDE



UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Offen im Denken

Dr. Marcel Klinger – Marco Grimm – Nils Heinemann

Trainingsblatt 1 zu Algorithmische M

SS 2023, 04.04.2023

Dieses Blatt bezieht sich auf die Videos 101 – 103. Abga

Aufgabe 1: In Video 102 sollten Sie Ihre persönliche Defini

(a) Geben Sie diese hier unverfälscht wieder. (3 Punkte)

(b) Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede gab es zwis genannten Definition? (2 Punkte)

Aufgabe 2 ★: In Video 103 habe ich ein kleines und nicht sehr Setzen Sie mit Scratch eine bessere Variante dieses Programms umfassen (5 Punkte):

(a) Mindestens zwei unterschiedliche Figuren, die in Endlosschleife tanzen.

(b) Natürlich tanzt man zu Hintergrundmusik.

(c) Die Bühne (d.h. der Hintergrund) sollte in irgendeiner Form animiert sein.

(d) Fügen Sie noch ein weiteres Gimmick hinzu und erläutern Sie kurz, worum es sich handelt.

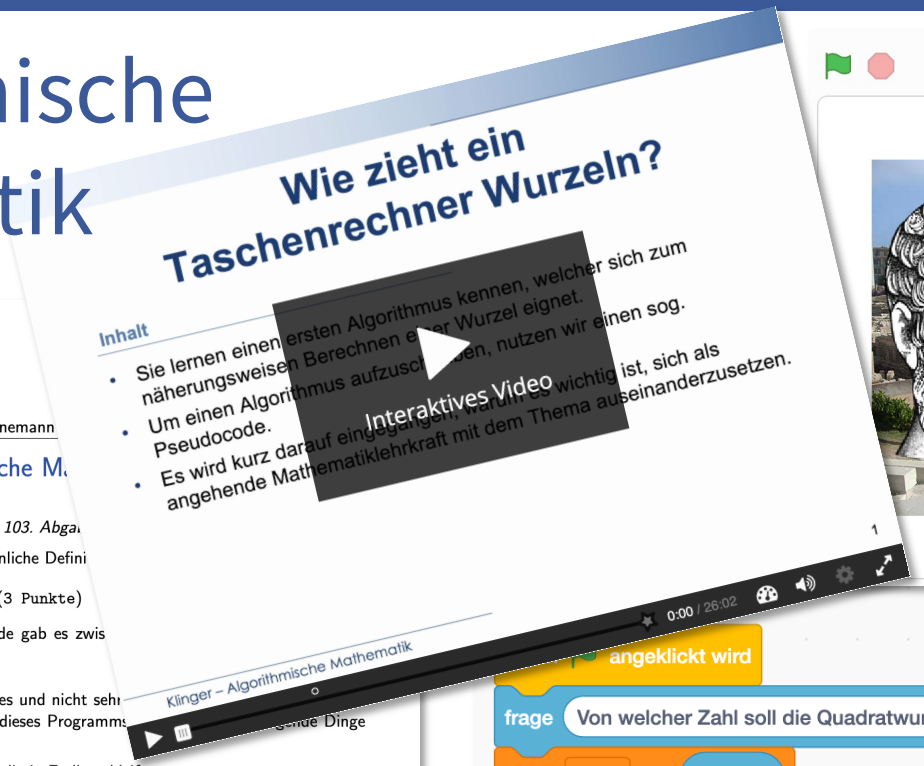
Aufgabe 3: In Video 101 haben wir das Heron-Verfahren hergeleitet.

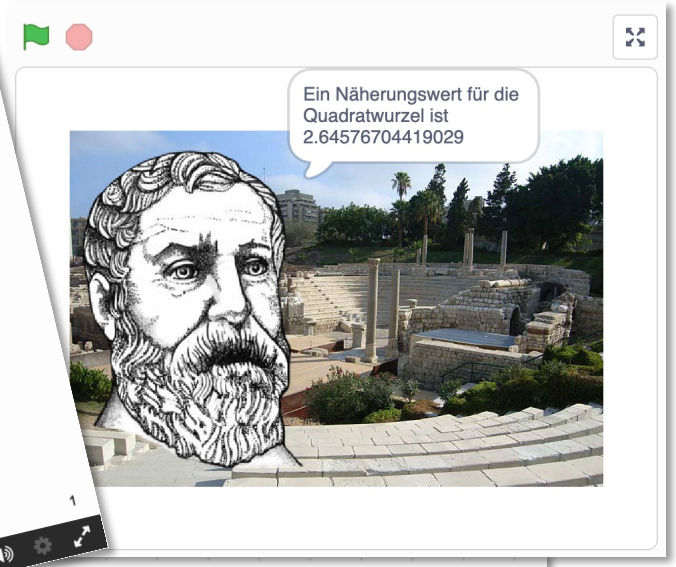
(a) Bestimmen Sie von Hand (natürlich dürfen einzelne Rechenschritte an den Taschenrechner ausgelagert werden) einen Näherungswert für $\sqrt{5}$. Stellen Sie sicher, dass dieser auf mindestens vier Nachkommastellen genau ist. (2 Punkte)

(b) Wenn als Abbruchkriterium im Heron-Verfahren die Bedingung $|x_n^2 - a| < 0,00001$ gewählt wird, was lässt sich dann über die Genauigkeit des gewonnenen Näherungswertes aussagen? (2 Punkte)

(c) Im Heron-Verfahren wurde das arithmetische Mittel der Rechteckseitenlängen verwendet. Verwenden Sie in einer alternativen Variante stattdessen das 2:1-gewichtete Mittel, d.h. $\frac{2a+b}{3}$ für zwei Zahlen a und b. Erfüllt der so entstehende Algorithmus weiterhin seinen Zweck? Woran nähert sich dieser für die Eingabe 5 an? (3 Punkte)

Aufgabe 4 ★: Implementieren Sie das Heron-Verfahren in Scratch. Hierbei soll ein Benutzer beliebige Werte einsetzen und die Genauigkeit frei bestimmen können. (8 Punkte)





Veranstaltungsstruktur/-inhalt

- Inhaltlich Streifzüge durch verschiedene Teildisziplinen (Analysis, Algebra, Numerik, Stochastik, …)
- Erstmalige Durchführung im WS 2020/21
- Die Veranstaltungsstruktur folgt einem Flipped-/Inverted-Classroom-Design.
  (Akçayır & Akçayır 2018; Werner et al. 2018)

Traditioniell:

Große Gruppe (Vorlesung) | Einzeln/Kleingruppe (Übungsblatt) | Mittlere Gruppe (Übung)

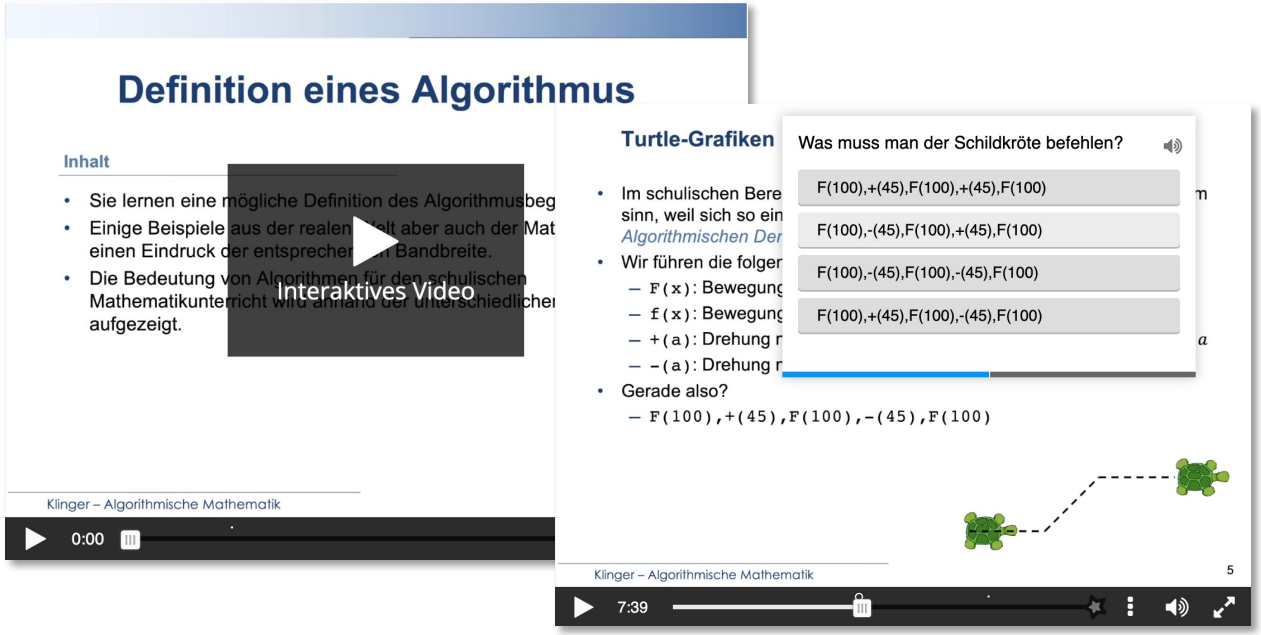
Zeitlicher Ablauf →

Hier:

Einzeln (Videos) | Kleingruppe/Mittlere Gruppe (Lerncafé) | Große Gruppe (Plenum)

Einzeln (Videos)

- Interaktive H5P-Videos als Erstkontakt zu einem Thema
- Videolänge < 15 min
  (Guo et al. 2014; Bordes et al. 2021)



Kapitel 1

Im ersten Kapitel der Veranstaltung erarbeiten wir uns grundlegende Begrifflichkeiten, lernen Scratch kennen und gewinnen erste Erfahrungen mit mathematischen Algorithmen.

Zum 18.04.2023

- 101: Das Heron-Verfahren
- 102: Definition Algorithmus
- 103: Scratch Einstieg

Zum 25.04.2023

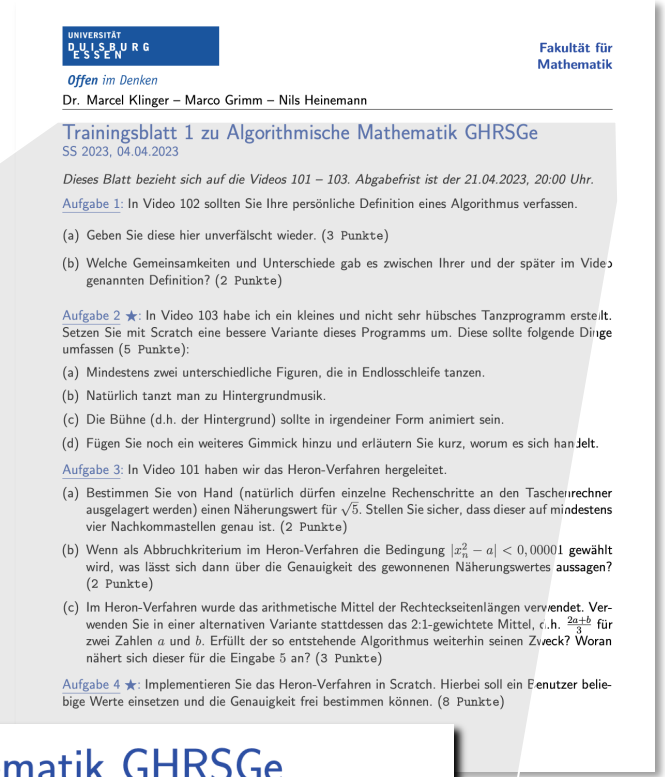
- 104: Algorithmen, Programme und Computer
- 105: Turtle-Grafik
- 106: Koordinaten-Grafik

Zum 02.05.2023

- 107: Euklidischer Algorithmus
- 108: Kontrollstrukturen
- 109: Euklidischer Algorithmus 2

Kleingruppe/Mittlere Gruppe (Lerncafé)

- Wöchentliches „Lerncafé“ im Übungsgruppenslot.
- Unmittelbar mit den Videos verzahnte Trainingsblätter
- Selbstständiges aber unterstütztes Bearbeiten der Trainingsblättern mit wöchentlicher Abgabe und Korrektur



UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Fakultät für Mathematik

Offen im Denken

Dr. Marcel Klinger – Marco Grimm – Nils Heinemann

Trainingsblatt 1 zu Algorithmische Mathematik GHRSGe
SS 2023, 04.04.2023

Dieses Blatt bezieht sich auf die Videos 101 – 103. Abgabefrist ist der 21.04.2023, 20:00 Uhr.

Aufgabe 1: In Video 102 sollten Sie Ihre persönliche Definition eines Algorithmus verfassen.

(a) Geben Sie diese hier unverfälscht wieder. (3 `Punkte`)

(b) Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede gab es zwischen Ihrer und der später im Video genannten Definition? (2 `Punkte`)

Aufgabe 2 ★: In Video 103 habe ich ein kleines und nicht sehr hübsches Tanzprogramm erstellt. Setzen Sie mit Scratch eine bessere Variante dieses Programms um. Diese sollte folgende Dinge umfassen (5 `Punkte`):

(a) Mindestens zwei unterschiedliche Figuren, die in Endlosschleife tanzen.

(b) Natürlich tanzt man zu Hintergrundmusik.

(c) Die Bühne (d.h. der Hintergrund) sollte in irgendeiner Form animiert sein.

(d) Fügen Sie noch ein weiteres Gimmick hinzu und erläutern Sie kurz, worum es sich handelt.

Aufgabe 3: In Video 101 haben wir das Heron-Verfahren hergeleitet.

(a) Bestimmen Sie von Hand (natürlich dürfen einzelne Rechenschritte an den Taschenrechner ausgelagert werden) einen Näherungswert für $\sqrt{5}$. Stellen Sie sicher, dass dieser auf mindestens vier Nachkommastellen genau ist. (2 `Punkte`)

(b) Wenn als Abbruchkriterium im Heron-Verfahren die Bedingung $|x_n^2 - a| < 0,00001$ gewählt wird, was lässt sich dann über die Genauigkeit des gewonnenen Näherungswertes aussagen? (2 `Punkte`)

(c) Im Heron-Verfahren wurde das arithmetische Mittel der Rechteckseitenlängen verwendet. Verwenden Sie in einer alternativen Variante stattdessen das 2:1-gewichtete Mittel, d.h. $\frac{2a+b}{3}$ für zwei Zahlen a und b. Erfüllt der so entstehende Algorithmus weiterhin seinen Zweck? Woran nähert sich dieser für die Eingabe 5 an? (3 `Punkte`)

Aufgabe 4 ★: Implementieren Sie das Heron-Verfahren in Scratch. Hierbei soll ein Benutzer beliebige Werte einsetzen und die Genauigkeit frei bestimmen können. (8 `Punkte`)

Trainingsblatt 1 zu Algorithmische Mathematik GHRSGe
SS 2023, 04.04.2023

Dieses Blatt bezieht sich auf die Videos 101 – 103. Abgabefrist ist der 21.04.2023, 20:00 Uhr.

Aufgabe 1: In Video 102 sollten Sie Ihre persönliche Definition eines Algorithmus verfassen.

(a) Geben Sie diese hier unverfälscht wieder. (3 `Punkte`)

(b) Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede gab es zwischen Ihrer und der später im Video genannten Definition? (2 `Punkte`)

Große Gruppe (Plenum)

- Klären von allg. Fragen (z.B. zu Videos)
- Abschließen eines Themenblocks gemeinsam mit allen im Vorlesungsslot.
  - Hierzu „Checkouts“ nach allen Kapiteln
- Präsenzübungsaufgaben

Aufgaben

- Beschreiben Sie einen Algorithmus in Pseudocode, der die Folgeglieder der Fibonacci-Folge (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …) bis zu einer gegebenen Maximalzahl $a_{\max}$ ausgibt.
- Implementieren Sie den genannten Algorithmus in Scratch.
- Betrachten Sie den folgenden Algorithmus.
  - Was gibt dieser für die Übergabe $z = 55$, $z = 500$ und $z = 12000$ zurück?
  - Erläutern Sie allgemein, welcher Funktion der Algorithmus dient.

```
BLACKBOX(z)
  s = 10
  i = 1
  SOLANGE s ≤ z
    i = i+1
    s = 10*s
RETURN i
```

Klinger – Algorithmische Mathematik 8

101: Das Heron-Verfahren

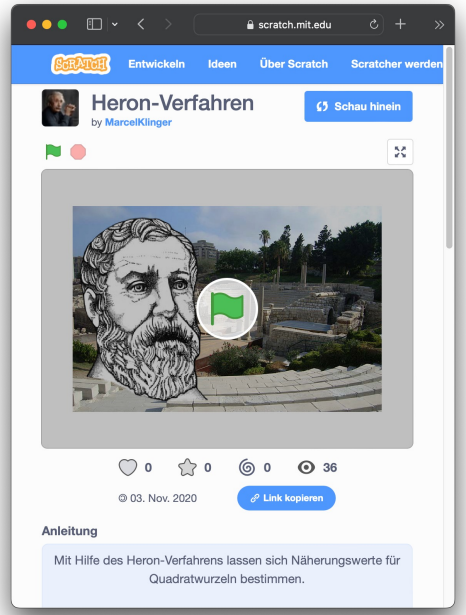
- Sie können
  - die grundsätzliche Natur von Näherungsverfahren beschreiben.
  - die Idee des Heron-Verfahrens zum näherungsweisen Berechnen von Quadratwurzeln beschreiben.
  - das Heron-Verfahren exemplarisch durchführen.
  - das Heron-Verfahren in Scratch implementieren.
  - die Notwendigkeit und Funktionsweise von Abbruchkriterien erläutern.
  - Sie können das Verfahren anhand bestimmter Vorgaben abändern.
  - die didaktischen Begriffe „Black Box“ und „White Box“ erläutern und anwenden.

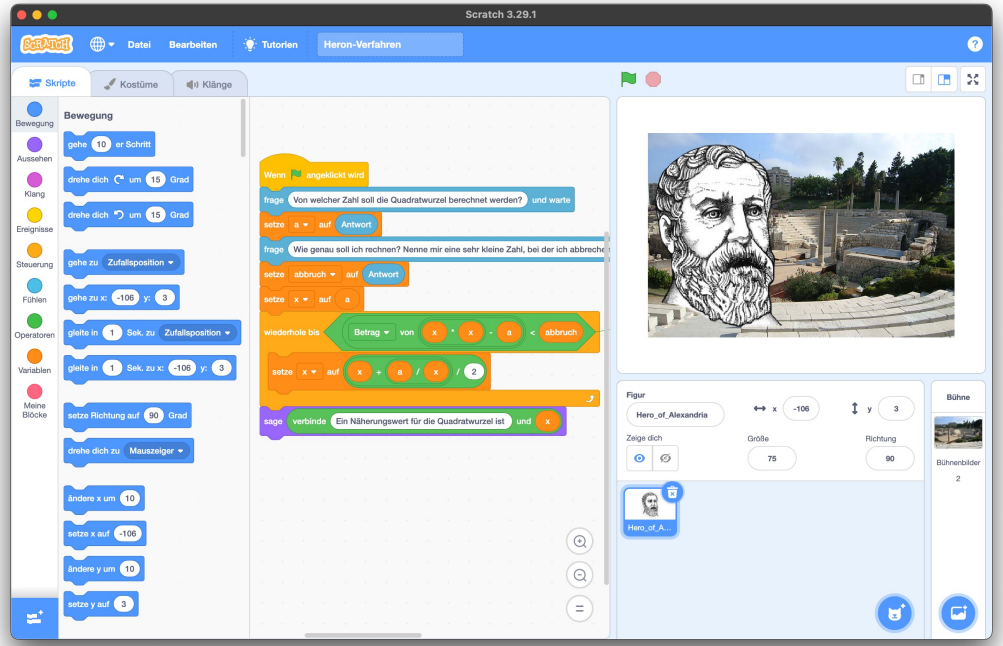
Klinger – Algorithmische Mathematik 2

Hands-on

s. https://scratch.mit.edu

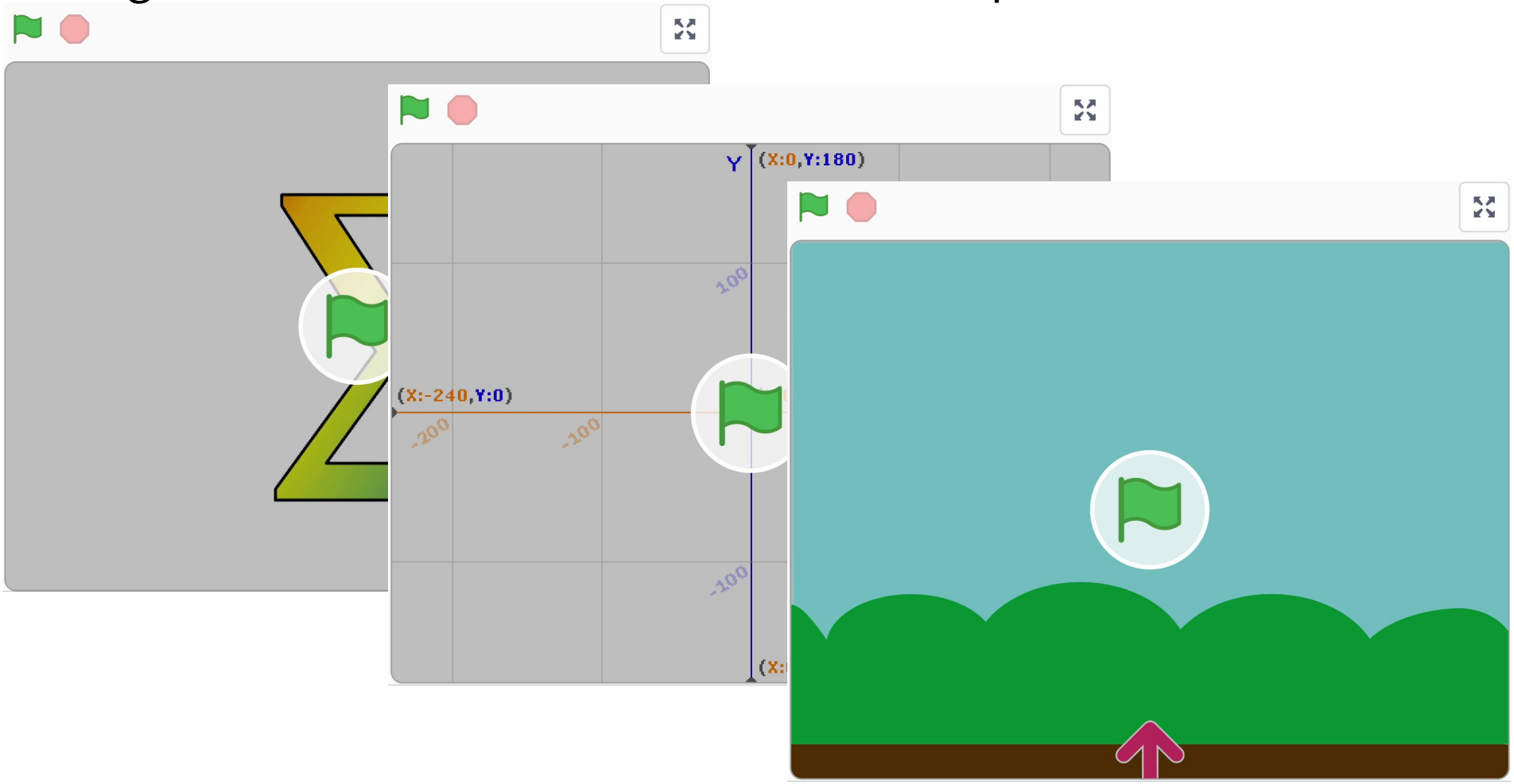
- Blockbasierte Programmierkonzepte
  (Jatzlau & Romeike 2017; Eppendorf & Marx 2020)
- Hier vor allem Scratch 3 des MIT
- Hauptargument: Sehr zugänglich und einfacher Transfer in die Schulpraxis





Hands-on

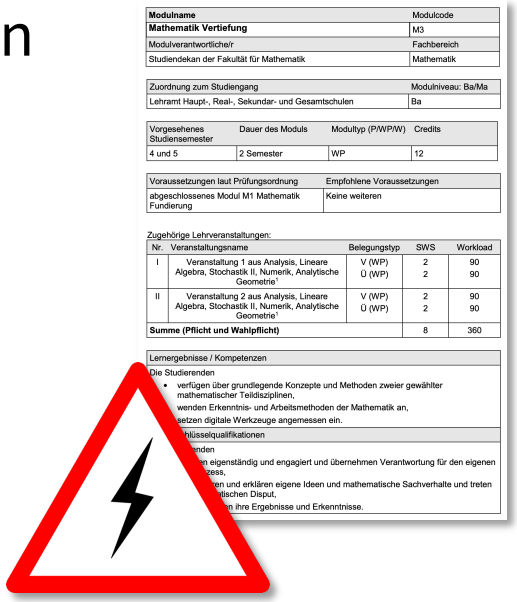
- Im Laufe der Veranstaltung werden immer wieder mathematische Algorithmen auf verschiedenen Niveaus implementiert.



Constructive Alignment

(nach Biggs 2003;
s. auch Barzel & Leuders 2021)

- Passung von Lernzielen, Lehr-Lern-Aktivitäten und dem Assessment.
- Hierzu auch: Klare Zieltransparenz
  - U.a.: Kompetenzen/Zusammenfassungen vor/nach den Videos,
  - Checkouts mit Aufgaben und Kompetenzen
  - sowie Probeklausur
- Im Modulhandbuch festgeschrieben: 90-minütige Klausur
  - Kombinationsprüfung aus klassischer Paper-and-Pencil-Klausur und praktischen Anteilen.
  - Außerdem: Verzahnung mit dem Maker-Praktikum



Modulname	Modulcode
Mathematik Vertiefung	M3
Modulverantwortliche/r	Fachbereich
Studiendekan der Fakultät für Mathematik	Mathematik

Zuordnung zum Studiengang	Modulniveau: Ba/Ma
Lehramt Haupt-, Real-, Sekundar- und Gesamtschulen	Ba

Vorgesehenes Studiensemester	Dauer des Moduls	Modultyp (P/WP/W)	Credits
4 und 5	2 Semester	WP	12

Voraussetzungen laut Prüfungsordnung	Empfohlene Voraussetzungen
abgeschlossenes Modul M1 Mathematik Fundierung	Keine weiteren

Zugehörige Lehrveranstaltungen:

Nr.	Veranstaltungsname	Belegungstyp	SWS	Workload
I	Veranstaltung 1 aus Analysis, Lineare Algebra, Stochastik II, Numerik, Analytische Geometrie[1]	V (WP) Ü (WP)	2 2	90 90
II	Veranstaltung 2 aus Analysis, Lineare Algebra, Stochastik II, Numerik, Analytische Geometrie[1]	V (WP) Ü (WP)	2 2	90 90
Summe (Pflicht und Wahlpflicht)			8	360

Lernergebnisse / Kompetenzen

Die Studierenden

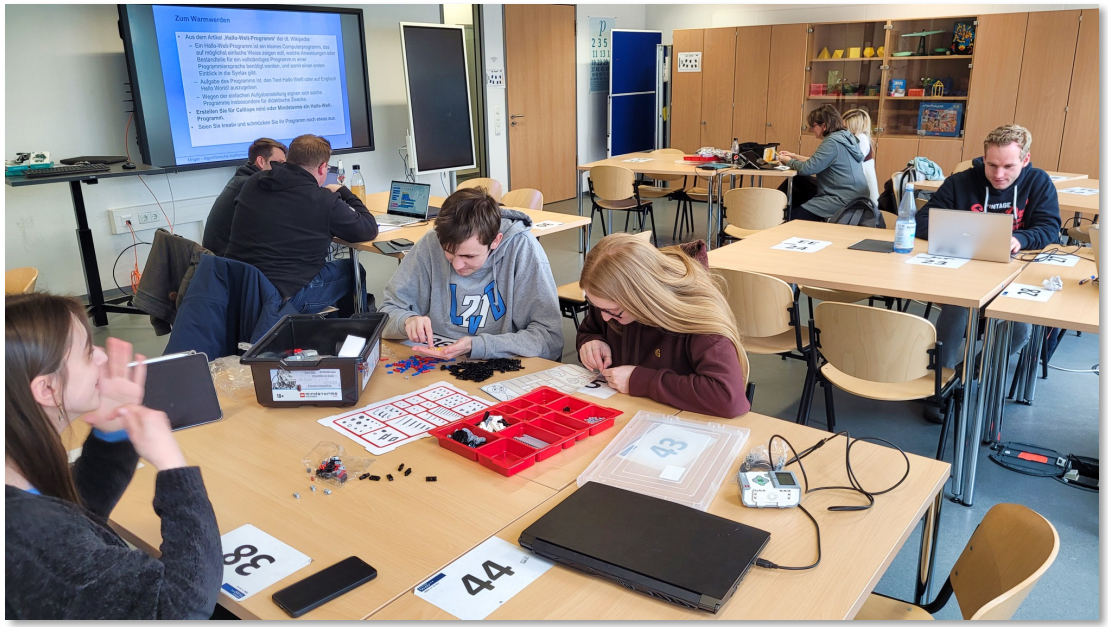
- verfügen über grundlegende Konzepte und Methoden zweier gewählter mathematischer Teildisziplinen,
- wenden Erkenntnis- und Arbeitsmethoden der Mathematik an,
- setzen digitale Werkzeuge angemessen ein.

Schlüsselqualifikationen

Studierenden

- arbeiten eigenständig und engagiert und übernehmen Verantwortung für den eigenen Prozess,
- begründen und erklären eigene Ideen und mathematische Sachverhalte und treten in einen fachlichen Disput,
- reflektieren ihre Ergebnisse und Erkenntnisse.

Das Maker-Praktikum



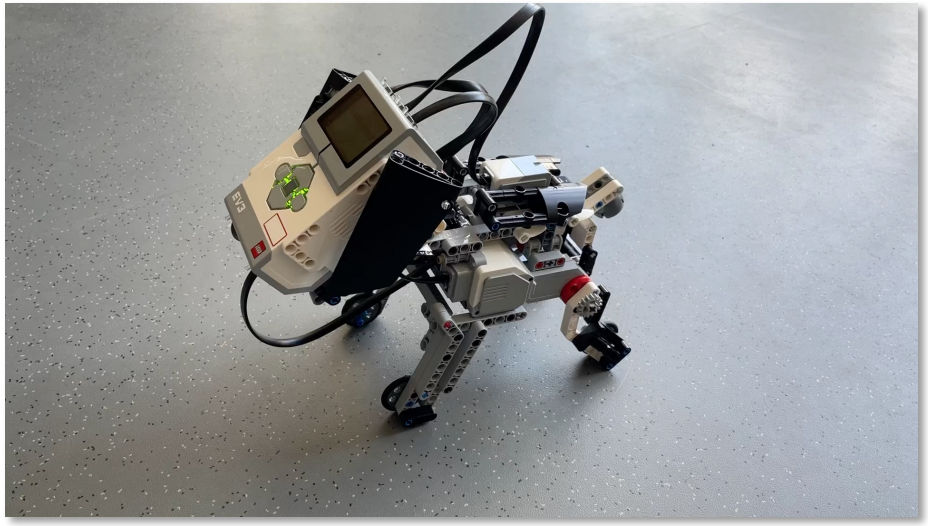
Idee

- Studierende erarbeiten ausgehend von einer Idee bis hin zu einer finalen Präsentation eine neue „Erfindung“.
- Einem „Makerspace“ nachempfunden
- Hierbei sollen Algorithmisches Denken aber auch konkrete Programmierung sowie mathematische Kompetenzen (und natürlich Spaß) im Mittelpunkt stehen.

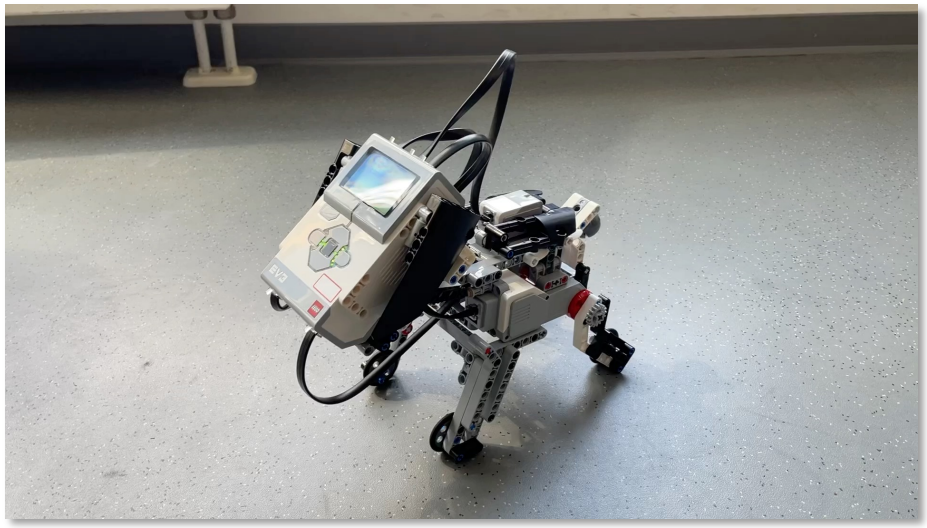
> *„Die Maker-Kultur [meɪkə] ist eine zeitgenössische Subkultur, die eine technologiebasierte Erweiterung der DIY-Kultur darstellt, die sich mit den hardwareorientierten Teilen der Hackerkultur überschneidet und sich an der Entwicklung neuer Geräte sowie an der Bastelei an bestehenden Geräten erfreut.“* (engl. Wikipedia, übersetzt)

Impressionen

- Was erfinden Studierende?
  - Einen Hund, der Rechenaufgaben löst und folgen soll
  - Einen visuellen LED-Countdown und Lärmwarner für den Unterricht
  - Eine Poker-Chip-Sortiermaschine
  - Optimiertes Eckenrechnen mithilfe eines Calliopes
  - Lernwerkzeug, um Füll- und Bewegungsgraphen nachzustellen



Erster Versuch

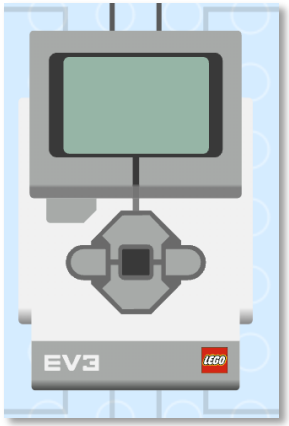


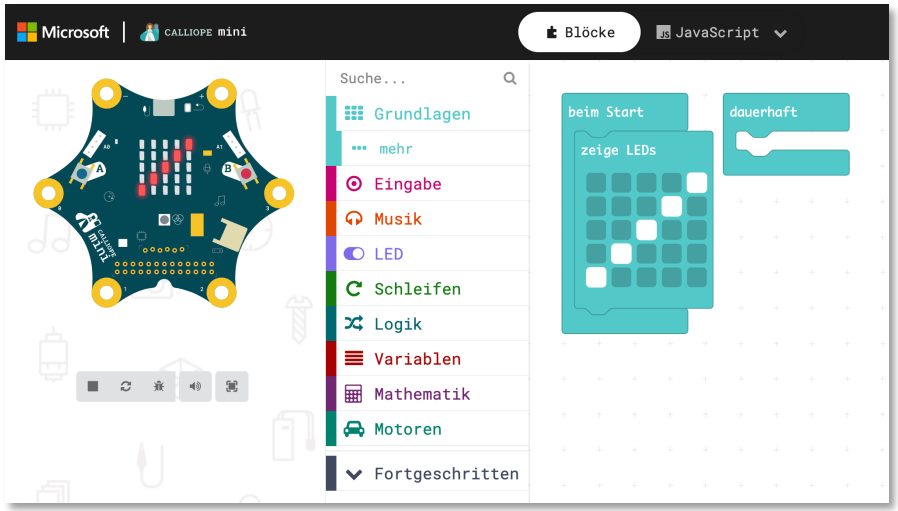
…45 min später

Struktur

- Kleingruppen (2-4 Personen)
- Grundsätzlich steht Calliope- sowie LEGO Mindstorms-Hardware bereit (Auswahl jedoch frei).
- Teilnahme verpflichtend; Erwerb von Bonuspunkten zur Klausur möglich.

Bewertungskriterien:
- Kreativität / Idee
- Bezug zur Mathematik
- Umsetzung / Komplexität
- Dokumentation
- Präsentation





Fazit

Algorithmische Mathematik

Evaluation

(zum Ende der letzten abgeschlossenen Durchführung im WS 2022/23)

Anforderungen an Klausur + Tipps wurden klar kommuniziert

sehr durchstrukturiert

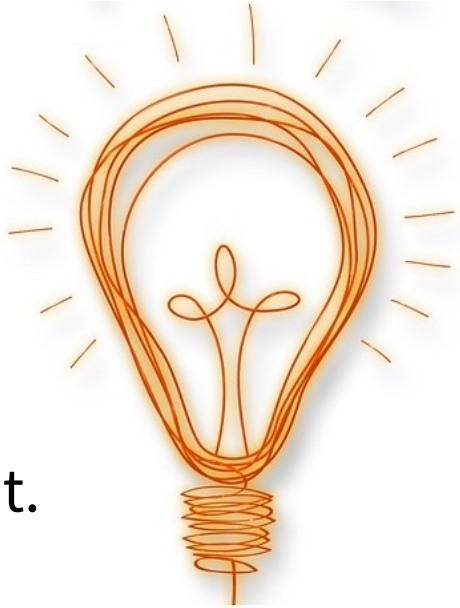
Aufgaben – Vorlesung – Videos passen zueinander

Die Flipped-Chart-Methode hatten wir bisher noch in keiner Mathematikübung → wurde als viel besser & hilfreicher wahrgenommen

Es wäre gut wenn der Pseudocode auf Scratch angepasst wäre dann kann man Programme die Scratch verfasst sind direkt Pseudocode formulieren

Vielleicht über expliziten Einsatz von Scratch im Unterricht reden. Wie könnte ein Stundenentwurf aussehen? (Wahrscheinlich ist hierfür aber noch Forschung notwendig)

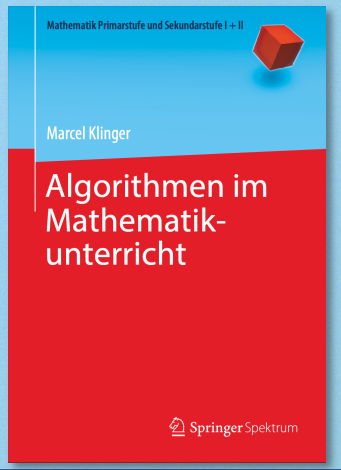
Lessons learned



- Insgesamt sehr positive Resonanz seitens der Studierenden
- Als Wahlpflichtmodul wird die Veranstaltung eher von technikaffinen Studierenden besucht.
- Zuletzt Tendenz eher in Richtung HRSGe-Studierende, weniger Grundschul-Studierende
- Überschneidungen und Kollisionen sind immer wieder ein Problem bei den stark aufeinander abgestimmten Veranstaltungskomponenten.
- Modulbestimmungen und prüfungsrechtliche Vorgaben erweisen sich immer wieder als ein zu starres Korsett.

Ausblick

- Beendigung des ersten Maker-Praktikum-Durchlaufs
- Formale Veranstaltungsevaluation
- Etwaig Flexibilisierung des Prüfungsformats
- Veröffentlichung und Erweiterung als Lehrwerk



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Gesamtes Material
(CC-BY-SA 4.0)

http://www.klinger.nrw
marcel.klinger@uni-due.de